



ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 03 décembre 2002 par

Michaël PROCHNOW

Pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSÉES**

TITRE

ÉCOULEMENTS DENSES DE GRAINS SECS

Président du Jury :

Jean-Pierre HULIN

JURY

MM. Franck RADJAI Rapporteur
Jean RAJCHENBACH Rapporteur
Jean-Pierre HULIN Examineur
Olivier POULIQUEN Examineur
Pierre MILLS Directeur de thèse
François CHEVOIR Conseiller d'étude



Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil
Unité Mixte de Recherche 113 LCPC-ENPC-CNRS

Remerciements

Cette étude a été menée à l'Unité Mixte de Recherche du LCPC-ENPC-CNRS. Michel Frémond m'a accueilli au Laboratoire des Matériaux et Structures du Génie Civil durant ces années de recherches doctorales. Je lui adresse tous mes remerciements pour m'avoir permis de faire mes premiers pas de chercheur dans cet endroit enrichissant situé à la jonction de plusieurs disciplines scientifiques. Plus récemment, je remercie également Olivier Coussy et Philippe Coussot de m'avoir permis de terminer ce travail dans d'excellentes conditions, tant matérielles qu'humaines.

Ce travail de recherche doit énormément à François Chevoir, sous la coordination de qui j'ai eu la chance et le plaisir de travailler. Il est à l'origine d'un très grand nombre d'idées, tant sur le fond que sur la forme, présentées dans cette thèse. Je reste impressionné par son sens physique, sa très grande culture scientifique qu'il a bien voulu partager avec moi. Mais surtout, par sa très grande disponibilité et patience qu'il a bien voulu m'accorder à chaque instant. Je souhaite qu'il trouve ici le témoignage de ma très profonde reconnaissance et gratitude pour ce travail qui, sans lui, n'aurait pas pu voir le jour.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Jean Rajchenbach, Franck Radjaï, Jean-Pierre Hulin, Olivier Pouliquen et Pierre Mills qui me font l'honneur de juger mon travail. Je remercie doublement Pierre Mills qui, à l'Université de Marne-La-Vallée, a dirigé et suivi l'avancée de ma thèse avec bienveillance, ainsi que Franck Radjaï et Jean Rajchenbach qui ont pu trouver le temps d'examiner et de rapporter mon manuscrit.

Je voudrais remercier tous les membres du laboratoire à qui je dois d'avoir travaillé dans une ambiance amicale. Le manuscrit d'Emmanuel Azanza a été un point de départ très utile à mon étude. Je n'oublie pas le bouillonnant Jean-Pierre Guilbaud, le mystérieux François Bertrand et les futurs docteurs Frédéric da Cruz, Sacha Emam et Sébastien Jarny. Je n'oublie pas l'ensemble des stagiaires Marc Albertelli, Virginie Leroy, Aleth Paris pour leurs travaux essentiels à ma thèse.

Un grand Merci à Dhelia Adeline, Evelyse Bourseau, Valérie François, Karine Lazare, Carmen Sanchez et Michelle Valenti, inestimables secrétaires, pour leur disponibilité, efficacité et bonne humeur qu'elles ont toujours montrées. Je voudrais aussi remercier les collègues du LCPC avec qui j'ai eu de nombreuses conversations, parmi eux Xavier Chateau, Jean-Noël Roux et Gaël Combe.

Au-delà du LMSGC, j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler avec Jacques Terrières, du LRPC d'Angers sur la gamma-densitométrie, avec Christophe Ancey du CEMAGREF de Grenoble pour l'usage occasionnel de son plan incliné, mais également toute l'équipe du LPMDI de l'Université de Marne-La-Vallée. Je me souviens de discussions avec Olivier Pitois et Reinhard Höhler concernant la possibilité d'applications pratiques de la diffusion multiple de lumière à l'analyse structurale de systèmes granulaires dynamiques. J'ai aussi beaucoup apprécié les nombreuses discussions amicales et collaborations avec Jim Jenkins de l'Université de Cornell.

Enfin j'associe à la finalisation de ce travail, mes grands-parents, mes parents, et ma femme Hee Soon et l'ensemble de mes amis qui m'ont fait part, de leurs angoisses et colères, mais je retiens surtout leur sympathie et leurs encouragements au cours de ces années.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
PLAN DU DOCUMENT	5
REFERENCES	7

Chapitre I – Généralités sur les écoulements granulaires

I. INTERACTIONS ENTRE GRAINS SECS	11
I.A. CONTACTS MAINTENUS ET COLLISIONS	12
I.B. FROTTEMENT SEC	14
II. TECHNIQUES EXPÉRIMENTALES	17
II.A. ECOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS	17
II.B. ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS	19
III. SIMULATIONS NUMÉRIQUES	19
III.A. LES MÉTHODES DE SPHÈRES MOLLES	20
III.B. LES MÉTHODES DE SPHÈRES DURES	21
III.C. LA DYNAMIQUE DES CONTACTS	22
IV. PRINCIPES D'UNE MODÉLISATION	22
IV.A. SYSTÈME ÉTUDIÉ	22
IV.B. DIFFICULTÉS DU PASSAGE MICRO-MACRO	24
IV.C. EQUATIONS DE CONSERVATION	25
IV.D. ADIMENSIONNEMENT	26
IV.E. FLUCTUATIONS DU MOUVEMENT	26
IV.F. CONDITIONS AUX LIMITES	27
IV.G. LOI DE COMPORTEMENT	27
V. MODÈLES ÉLÉMENTAIRE	28
V.A. RÉGIME "FRICTIONNEL"	28
V.B. RÉGIME "COLLISIONNEL"	31

Chapitre II – Ecoulements denses de grains secs :

Etat de l'art

I.	MILIEUX GRANULAIRES DENSES	41
I.A.	COMPACITÉ	41
I.B.	DILATANCE	43
II.	GÉOMÉTRIES D'ÉTUDE	44
II.A.	ÉCOULEMENTS CONFINÉS	45
II.B.	ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE	45
III.	STRUCTURE ET CINÉMATIQUE	46
III.A.	CELLULE DE CISAILLEMENT	46
III.B.	CONDUITE VERTICALE	47
III.C.	PLAN INCLINÉ	49
III.C.1.	Seuil d'écoulement	49
III.C.2.	Études de l'écoulement	51
III.C.3.	Loi d'échelle	53
III.D.	SOCLE MEUBLE	54
III.E.	DISCUSSION	55
IV.	MICROMÉCANIQUE	56
IV.A.	FLUCTUATIONS ET CORRÉLATIONS DU MOUVEMENT DES GRAINS	56
IV.B.	RÉSEAU DE CONTACT	58
IV.C.	DISCUSSION	60
V.	CONCLUSION	61

Chapitre III - Ecoulements sur plan incliné

I.	SYSTÈME SIMULÉ	65
II.	DIAGRAMME D'ÉCOULEMENT	69
III.	STRUCTURE	71
III.A.	DILATANCE	71
III.B.	STRUCTURATION EN COUCHES	72
III.C.	TRAJECTOIRES	73
IV.	CINÉMATIQUE	75
IV.A.	VITESSE DE TRANSLATION	75
IV.A.1.	Vitesse moyenne	75
IV.A.2.	Loi d'échelle	78
IV.A.3.	Fluctuations	82
IV.B.	VITESSE DE ROTATION	86
IV.B.1.	Vitesse moyenne	86
IV.B.2.	Fluctuations	87
V.	RÉSEAU DE CONTACT - TEXTURE	89
V.A.	GÉOMÉTRIE DU RÉSEAU DE CONTACT	91
V.A.1.	Anisotropie	91
V.A.2.	Coordinance	94
V.B.	FORCES DE CONTACT	95
V.B.1.	Distribution	96
V.B.2.	Anisotropie	104
V.C.	CALCUL DU TENSEUR DES CONTRAINTES	108
VI.	ÉCOULEMENTS DE POLYGONES	113
VI.A.	ETUDE EXPÉRIMENTALE	113
VI.B.	SIMULATIONS NUMÉRIQUES	115
VII.	CONCLUSION	117

Chapitre IV - Ecoulements en conduite verticale

I.	GÉOMÉTRIE BIDIMENSIONNELLE	123
I.A.	DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL	123
I.B.	RÉSULTATS	125
I.C.	SIMULATIONS NUMÉRIQUES	131
II.	CONDUITE À SECTION RECTANGULAIRE	134
II.A.	DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL	134
II.B.	RÉSULTATS	136
III.	CONDUITE CIRCULAIRE	140
III.A.	DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL	140
III.B.	REVUE DES TRAVAUX SUR LES MATÉRIAUX GRANULAIRES PAR IRM	143
III.C.	VÉLOCIMÉTRIE IRM	144
III.D.	TRAITEMENT DES IMAGES	146
III.E.	RÉSULTATS	147
III.F.	PERSPECTIVES	150
IV.	CONCLUSION	150

Chapitre V - Modélisation et discussion des résultats

I. ETUDE COMPARÉE DE MODÈLES RHÉOLOGIQUES	153
I.A. MODÈLES FRICTIONNELS	156
I.B. MODÈLES COLLISIONNELS	156
I.B.1. Sans fluctuations de vitesse	157
I.B.2. Avec fluctuations de vitesse	159
I.C. MODÈLES "FRICTIONNEL-COLLISIONNEL"	165
I.C.1. Modèle diphasique	166
I.C.2. Dilatance	168
I.C.3. Contribution collisionnelle	169
I.C.4. Profil de vitesse et loi d'échelle	171
I.C.5. Conclusion et autres modèles	174
I.D. MODÈLES NON-LOCAUX	176
I.D.1. Mouvement de colonnes	177
I.D.2. Transition de connexité	180
I.E. PROCESSUS ACTIVÉS	186
I.F. CONCLUSION	186
II. MICROMÉCANIQUE	187
II.A. FROTTEMENT ET ROTATION	187
II.A.1. Vitesse de rotation moyenne et demi-gradient de vitesse	187
II.A.2. Fluctuation de la vitesse de rotation et frottement effectif	189
II.A.3. Influence du coefficient de frottement intergrain	192
II.A.4. Estimation des fluctuations de vitesse de rotation	194
II.B. CALCUL DU TENSEUR DES CONTRAINTES	195
III. CONCLUSION	200
CONCLUSIONS	203

ANNEXES

Annexe 1 - Gamma-densitométrie

I.	INTRODUCTION	209
II.	PRINCIPE ET CARACTÉRISTIQUES DU DISPOSITIF DE MESURE	210
III.	MESURE ET PRÉCISION DE LA MESURE	212
IV.	CANAUX D'ÉCOULEMENT	213
V.	PROFILS DE COMPACTITÉ	214
VI.	CONCLUSIONS	216

Annexe 2 - Vélocimétrie IRM

I.	PRINCIPE DE LA RÉSONANCE MAGNÉTIQUE NUCLEAIRE	219
I.A.	MAGNÉTISME NUCLEAIRE	219
I.B.	EQUATIONS DE BLOCH	219
I.C.	LE PHÉNOMÈNE DE RÉSONANCE MAGNÉTIQUE NUCLEAIRE	221
I.D.	ECHO DE SPIN	224
II.	PRINCIPE DE L'IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE NUCLEAIRE	227
II.A.	TOMOGRAPHIE RMN	227
II.B.	MISE EN PLACE DES ÉVÉNEMENTS D'UNE SÉQUENCE IRM	229
II.C.	SÉQUENCE D'IMAGERIE D'ÉCHO DE SPIN	234
II.D.	TEMPS D'ACQUISITION	234
III.	VÉLOCIMÉTRIE RMN	235
III.A.	IMAGERIE DE FLUX	235
III.B.	FLUX PERPENDICULAIRE AU PLAN DE COUPE : VÉLOCIMÉTRIE PAR TEMPS DE VOL.	236
III.C.	FLUX PARALLÈLE AU PLAN DE COUPE : IMAGERIE DE PHASE	237
III.C.1.	Principe de vélocimétrie par codage de phase	237
III.C.2.	Imagerie par contraste de phase	239
III.C.3.	Imagerie de flux zébrée	240
III.C.4.	Imagerie par marquage magnétique : "Tagging"	243
IV.	CONCLUSIONS	243

Annexe 3 - Imagerie

I.	ECOULEMENTS BIDIMENSIONNELS	247
II.	ECOULEMENTS TRIDIMENSIONNELS	249

Annexe 4 - Dynamique des contacts

I.	LOIS DE CONTACT GÉNÉRALISÉES	256
II.	PRÉSENTATION RAPIDE DE L'ALGORITHME	258
III.	CAS DES POLYGONES	264
IV.	CONCLUSION	266

Annexe 5 - Techniques de prise de moyenne

I.	MOYENNES PONDÉRÉES	270
II.	APPLICATION AU TENSEUR DES CONTRAINTES	273
III.	STATISTIQUES SUR LE RÉSEAU DE CONTACT	274

Annexe 6 - Tenseur de texture et des contraintes

I.	TENSEUR DE TEXTURE	278
II.	TENSEUR DES CONTRAINTES	280
II.A.	MOMENT INTERNE D'UN GRAIN	282
II.B.	CAS D'UNE ASSEMBLÉE DE N GRAINS	285
III.	CONCLUSION	286
	BIBLIOGRAPHIE	289

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Les matériaux granulaires sont des assemblées de particules solides macroscopiques plongées dans un fluide interstitiel (poudres, sable, granulats, graines...). Ces matériaux peuvent se comporter comme des solides ou comme des fluides, selon la façon dont ils sont sollicités, à l'image du sablier [Brown70, Duran97, Jaeger96, de Gennes98, Pdgm98, Lcpc00, PG01, Cras02]. Sujet d'importance à la fois dans de nombreux processus industriels (transport, stockage en silo) et en géophysique (écoulements gravitaires rapides, mouvement des dunes de sable...), les écoulements granulaires sont l'objet de recherches actives, à la frontière entre la mécanique et la physique [Tüzün82, Savage89, Hutter94, Rajchenbach00]. Ils sont très sensibles à de nombreux paramètres : géométrie de l'écoulement, rugosité des parois, débit, forme des grains, granulométrie et couplage avec le fluide interstitiel.

Nous allons donc d'emblée limiter notre champ d'investigation, en considérant des assemblées de grains secs, sans cohésion. Ceci signifie que nous négligeons l'influence éventuelle du fluide interstitiel, et que les grains n'interagissent que par contact direct (collisions, frottement). Nous excluons par ailleurs les forces de cohésion (van der Waals pour les poudres, ou ponts capillaires dans les matériaux granulaires humides [Bocquet98, Halsey98, Fraysse99, Restagno00]) ou encore les effets électrostatiques [Wolf02]. Ceci nous limite donc à des écoulements de grains assez gros (diamètre supérieur à quelques centaines de microns), dans un fluide peu visqueux tel que l'air. Par ailleurs, nous allons considérer des assemblées de grains relativement monodisperses (une trop forte distribution de taille engendre des problèmes de ségrégation, qui sont l'objet d'études spécifiques), et relativement sphériques.

Alors la rhéologie n'est commandée que par les transferts de quantité de mouvement et la dissipation d'énergie intervenant dans les contacts directs entre grains et avec les parois. Mais en dépit de l'apparente simplicité de ce système, le comportement des matériaux granulaires s'avère très riche, et présente des analogies avec les différents états de la matière (solide, verre, liquide, gaz), selon les sollicitations.

Dans le cas d'une forte agitation et/ou d'une faible dissipation, le milieu est plutôt dilué et les grains interagissent par des collisions binaires. On peut alors faire l'analogie avec un

gaz, les grains jouant le rôle des molécules. On peut définir une "température granulaire" qui mesure les fluctuations de vitesse. Pendant les vingt dernières années, les outils statistiques de la théorie cinétique ont été mis en œuvre et ont permis un traitement quasi-hydrodynamique de ce régime collisionnel [Campbell90].

Cependant, du fait de la dissipation qui favorise la formation d'amas [Hopkins90, Goldhirsch93, McNamara94, Kadanoff99] et/ou du confinement, les écoulements sont le plus souvent denses, avec une compacité proche de celle de l'empilement désordonné compact. C'est le cas par exemple dans le cas des avalanches de sable à la surface d'un tas. Alors, le mouvement des grains est fortement contraint, les forces se transmettent à travers un réseau de contact maintenu percolant à travers le système et les deux hypothèses de base de la théorie cinétique (collisions binaires et chaos moléculaire) ne sont plus valables. Dans ce régime, le comportement du matériau évoque celui des liquides.

Quant à la limite quasi-statique des écoulements denses (déformations lentes), elle a été étudiée en détail par les mécaniciens des sols [Nedderman92, Vermeer98]. Les observations macroscopiques (essai triaxial) ont motivé des modèles phénoménologiques, dont l'origine microscopique commence à être comprise en détail grâce aux simulations numériques [Roux02]. Dans ce régime, la résistance du matériau est essentiellement caractérisée par un angle de frottement interne, et le critère de Mohr-Coulomb distingue la stabilité de la rupture, laquelle intervient par glissement selon des plans (aussi appelés bande de cisaillement [Desrues96]), quand le rapport des contraintes tangentielle et normale atteint le frottement interne. Pour les grandes déformations, le changement de volume doit être pris en compte. En effet, on observe que sous cisaillement continu, un empilement initialement lâche se compacte alors qu'un empilement initialement dense se dilate. Cette dilatance de Reynolds est liée au désenchevêtrement des grains. Le matériau évolue vers un état critique, où les contraintes et la compacité ont des valeurs d'équilibre, indépendantes des conditions initiales [Jackson83].

Les écoulements denses non quasi-statiques restent la situation la moins bien comprise. Et même si la recherche sur ce sujet a été particulièrement active ces toutes dernières années, combinant simulations numériques discrètes et expériences fines sur des systèmes modèles, la compréhension complète n'est pas encore en vue.

Les recherches présentées dans ce document ont eu pour objectif de recueillir des informations précises sur les écoulements denses de grains secs, soit par l'expérience soit par simulations numériques, et de les comparer avec les prédictions de plusieurs modèles. Nous nous sommes restreints à l'étude de deux géométries d'écoulement gravitaire, l'une à surface libre, le plan incliné, dans la suite des travaux déjà menés au laboratoire [Azanza98], et l'autre confinée, la conduite verticale. La différence essentielle est la possibilité ou non qu'a le matériau de se dilater et ainsi de s'adapter aux cisaillement imposé, ce qui conduit à des comportements variés : localisation du cisaillement, fluctuations des forces, intermittences... Dans ces deux géométries, nous considérons le cas où les parois sont rugueuses (échelle de rugosité comparable à celle des grains). Ceci conduit à limiter la vitesse de glissement à la paroi, à générer une agitation à l'intérieur du milieu en écoulement, et à créer une zone de cisaillement dont l'épaisseur est de l'ordre de la dizaine de grains. Nous verrons que les effets de parois sont très importants dans ces écoulements granulaires.

Pour les simulations numériques, nous avons utilisé la méthode de dynamique des contacts, adaptée à la gestion de système denses. D'autre part, nous avons eu la chance de pouvoir utiliser un imageur par résonance magnétique nucléaire (IRM), qui venait d'arriver dans notre laboratoire. Ainsi notre expérience de vélocimétrie en conduite verticale a constitué à la fois la première expérience de rhéométrie en IRM du laboratoire et une première mondiale.

PLAN DU DOCUMENT

Le document est organisé de la façon suivante. Le chapitre I est dédié à un certain nombre de généralités relatives à l'étude des matériaux granulaires (nature des interactions, méthodes expérimentales et de simulations numériques, principes d'une modélisation). Le chapitre II dresse un tableau des connaissances sur les écoulements denses de grains secs dans différentes géométries, tant à l'échelle macroscopique qu'à l'échelle microscopique des grains. Le chapitre III décrit notre étude, essentiellement par simulation numérique, des écoulements sur plan incliné. Le chapitre IV est consacré à nos travaux, cette fois-ci essentiellement expérimentaux, sur les écoulements en conduite verticale. Enfin le chapitre V discute les résultats obtenus dans le cadre de différents modèles rhéologiques ou micromécaniques. Nous avons fait le choix de renvoyer en annexe les aspects les plus techniques, soit relatifs aux méthodes expérimentales (gammadensimétrie, imagerie, IRM), soit relatifs aux simulations numériques (dynamique des contacts), au traitement des données (prise de moyenne) et à la micromécanique (texture).

Certains résultats exposés dans ce document ont été l'objet de communications, au colloque "Physique et Mécanique des Matériaux Granulaires" à l'ENPC (septembre 2000), au congrès international de rhéologie (Cambridge, août 2000) et au congrès "Powders and Grains" (Japon, mai 2001).

REFERENCES

M. Prochnow, F. Chevoir et M. Albertelli

Dense granular flows down a rough inclined plane

13^{ème} Conférence Internationale de Rhéologie, Cambridge, CD-Rom (août 2000).

M. Prochnow, F. Chevoir, P. Mills et J. Jenkins

Ecoulements granulaires denses sur un plan incliné: microstructure et loi de comportement

Colloque "Physique et Mécanique des Matériaux Granulaires, ENPC, 425-430 (sept. 2000).

M. Prochnow, F. Bertrand, P. Moucheron, F. da Cruz, J-P. Guilbaud, F. Chevoir et P. Coussot

Ecoulements denses de grains secs dans une conduite verticale: mesure du champ de vitesse par IRM

Colloque "Physique et Mécanique des Matériaux Granulaires, ENPC, 431-436 (sept. 2000).

F. Chevoir, M. Prochnow, J. Jenkins et P. Mills

Dense granular flows down an inclined plan

Powders and Grains, Sendai, Japon, edited by Y. Kishino, 373-376 (mai 2001).

F. Chevoir, M. Prochnow, P. Moucheron, F. da Cruz, F. Bertrand, , J-P. Guilbaud, P. Coussot et J.N. Roux

Dense granular flows in an inclined chute

Powders and Grains, Sendai, Japon, edited by Y. Kishino, 399-402 (mai 2001).

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES

ECOULEMENTS GRANULAIRES

CHAPITRE I

GENERALITES SUR LES

ÉCOULEMENTS GRANULAIRES

Ce chapitre a pour objet de donner quelques informations générales utiles pour l'étude des écoulements granulaires. Ainsi on commence par décrire le système étudié à l'échelle microscopique, à travers les interactions entre les grains. On décrit ensuite les techniques d'étude des écoulements, soit expérimentales, soit par simulation numérique discrète. Enfin, on donne les éléments d'une description théorique de tels écoulements, sans entrer dans le détail des modèles eux-mêmes, qui feront l'objet du § V.

I. Interactions entre grains secs

Le comportement du matériau en écoulement est intimement lié aux interactions entre grains. Dans le cas des grains secs, non cohésifs, ces interactions se résument à des contacts directs, qui constituent les mécanismes élémentaires de transfert de quantité de mouvement et de dissipation de l'énergie.

Au niveau microscopique, le contact a lieu entre deux surfaces rugueuses, qui vont se déformer de façon élastique, plastique ou visqueuse. Il n'y a pas lieu d'entrer dans une étude détaillée de ces phénomènes, qui relève de la physique du contact [Johnson85], et nous allons nous contenter de résumer les lois qui relient les forces et les vitesses dans la zone de contact à l'échelle mésoscopique des grains, en adoptant des lois simplifiées. Pour plus de détail, on renvoie à [Azanza98].

Dans la suite, on considère le cas de sphères en dimension 3 (3D) et de disques en dimension 2 (2D), de diamètre d (rayon R), masse m et moment d'inertie I .

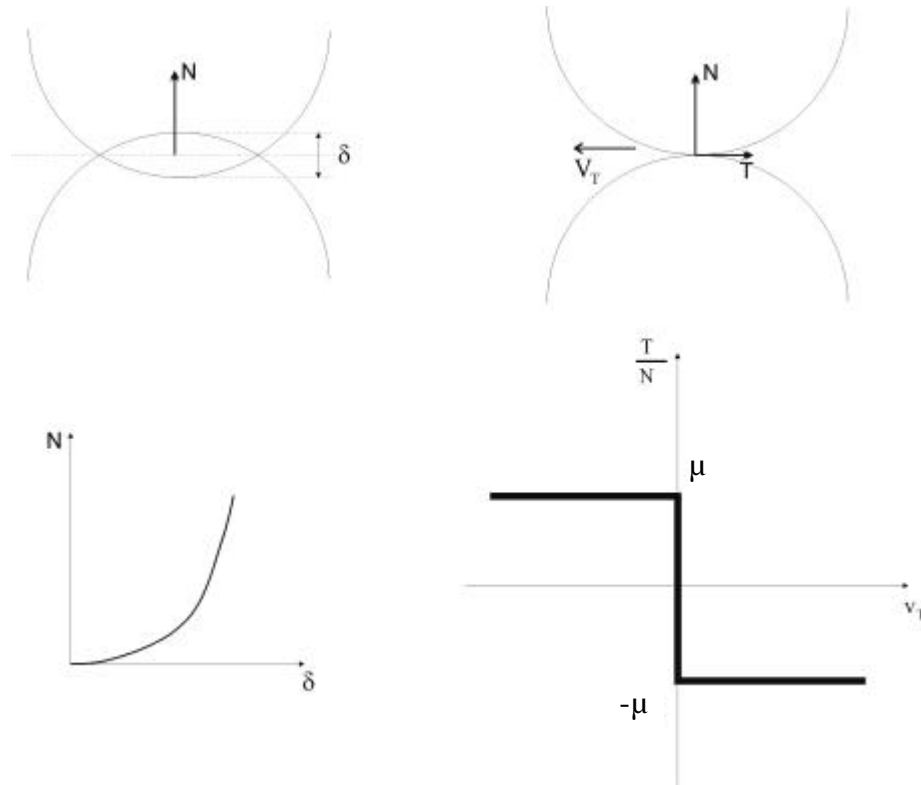


Figure I - 1 : Zoom sur la zone de contact entre deux grains :

a: déformation et force normale, b : vitesse tangentielle et force tangentielle.

I.A. Contacts maintenus et collisions

Pendant la phase où le contact est maintenu, on peut en première analyse adopter un modèle de déformation élastique du contact, suivant en cela le modèle proposé par Hertz en 1881, ce qui fournit une relation simple entre la force normale N au point de contact et la déformation δ du contact :

$$N = \begin{cases} k\delta & \text{pour des disques} \\ k\delta^{3/2} & \text{pour des sphères} \end{cases} \quad [\text{I.1}]$$

k est lié au module d'Young du matériau, à son coefficient de Poisson et au rayon du grain.

Dans certains cas, le contact reste actif pendant une durée significative, et l'on parlera de contact maintenu. En écoulement, on s'attend à ce que les contacts s'ouvrent et se ferment fréquemment. Le cas élémentaire est la collision binaire, mais il peut aussi y avoir des situations de contact multiple. De façon générale, on parlera de collision lorsqu'il y a une variation brutale de la vitesse relative au point de contact. Dans un écoulement dense, la

distinction entre contact maintenu et collision n'est pas toujours évidente. On y reviendra aux Chap II § IV et Ann 1.

Dans le cadre du contact élastique de Hertz, il est possible de décrire le choc élastique entre deux objets, en intégrant les équations fondamentales de la dynamique. On calcule ainsi la durée de la collision τ_c et l'interpénétration maximale δ_m en fonction de la vitesse d'impact v_i :

$$\begin{cases} \tau_c = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}} & \text{et } \delta_m = \frac{\tau_c v_i}{\pi} & \text{pour des disques} \\ \tau_c = 2,94 \sqrt{\frac{m^2}{k^2 v_i}} & \text{et } \delta_m = \frac{\tau_c v_i}{2,94} & \text{pour des sphères} \end{cases} \quad [\text{I.2}]$$

Cependant, ce modèle ne prend pas en compte de dissipation d'énergie (qui intervient par viscosité, plasticité dans la région du contact, ou encore génération d'ondes élastiques dans les grains). C'est la notion de coefficient de restitution, introduite par Newton en 1687, qui retiendra notre attention pour décrire les collisions inélastiques. Ce paramètre empirique relie les vitesses relatives normales au point de contact avant et après le choc (V_{CN}^- et V_{CN}^+) :

$$e_N = -\frac{V_{CN}^+}{V_{CN}^-} \text{ avec } e_N \in [0,1] \quad [\text{I.3}]$$

Une telle formulation est cohérente avec l'idée qu'à l'échelle du mouvement des grains, la collision à une durée extrêmement courte, et que les déformations restent localisées dans la zone de contact. En conséquence, nous décrivons les grains comme des corps rigides [Goldsmith60, Brach91, Walton93b, Moreau94]. Les collisions sont alors des phénomènes instantanés et localisés au point de contact.

La force de contact \vec{f} très intense est intégrée pendant la durée très courte du choc τ_c , ce qui définit une percussion :

$$\vec{P} = \int_{\tau_c} \vec{f}(t) dt \quad [\text{I.4}]$$

A cette percussion sont associées des discontinuités de vitesse de translation et de rotation :

$$\begin{cases} (\vec{V}^+ - \vec{V}^-) = \frac{\vec{P}}{m} \\ (\vec{\omega}^+ - \vec{\omega}^-) = \frac{\vec{R} \wedge \vec{P}}{I} \end{cases} \quad [\text{I.5}]$$

\vec{V}^- , $\vec{\omega}^-$, \vec{V}^+ et $\vec{\omega}^+$ sont respectivement les vitesses de translation et de rotation avant et après le choc du grain subissant la percussion. \vec{R} désigne le vecteur allant du centre du grain au point de contact. Les forces extérieures (gravité) sont négligeables devant l'action de la percussion. S'agissant de grains circulaires pour lesquels la vitesse normale au point de contact est égale à la vitesse normale de translation, la loi de restitution de Newton permet d'écrire :

$$P_N = -\frac{m}{2}(1 + e_N) V_N^- \quad [\text{I.6}]$$

I.B. Frottement sec

On doit aussi tenir compte des déformations tangentielles dans la zone de contact. Après les travaux de Leonard De Vinci puis d'Amontons (1699), c'est en 1785 que Coulomb proposa une loi macroscopique, exprimant une inégalité entre la force tangentielle T et la force normale N à la surface de contact, à travers un coefficient de frottement μ :

$$|T/N| \leq \mu \quad [\text{I.7}]$$

Il y a inégalité si la vitesse tangentielle au point de contact (V_{CT}) est nulle (contact "roulant"), égalité sinon (contact "glissant").

On s'aperçoit en fait que l'on doit distinguer le coefficient de frottement statique μ_s , qui décrit la résistance à vaincre pour la mise au mouvement à partir du repos, du coefficient de frottement dynamique μ_D , qui décrit la force qu'il faut appliquer pour maintenir une vitesse de glissement constante. On a généralement $\mu_s > \mu_D$.

Les mécanismes physiques du frottement solide, en particulier son évolution dans le temps, ont été récemment étudiés [Bureau02]. Sans rentrer dans le détail, indiquons que ce

coefficient de frottement peut être estimé par le rapport entre la résistance moyenne au cisaillement des aspérités de surface, et le seuil de plasticité de ces mêmes aspérités. Il est généralement compris entre 0,1 et 1.

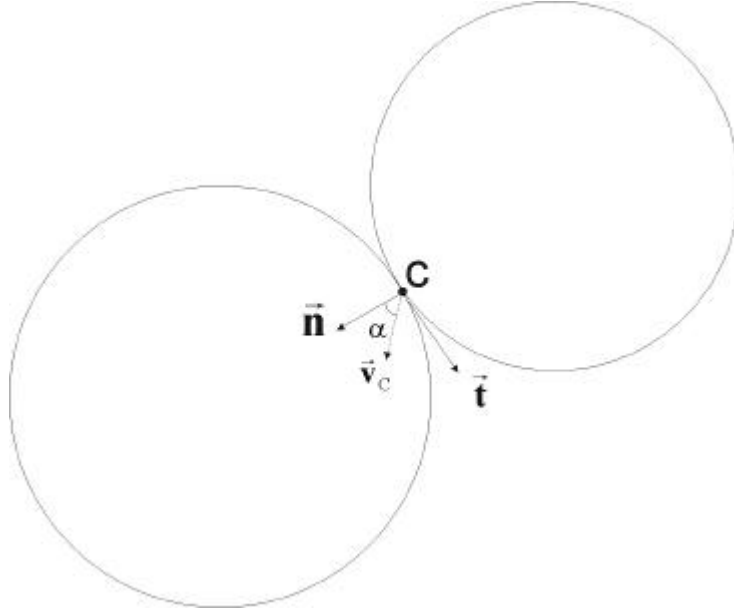


Figure I - 2 : Collision oblique entre deux sphères.

Revenons alors au problème de la collision entre deux sphères, dans le cas où l'on peut s'attendre à un effet du frottement. C'est le cas des collisions obliques, où la vitesse d'impact fait un angle α avec la direction normale au point de contact (voir figure I-2). Ce problème a été étudié d'un point de vue microscopique par [Maw76 et 81]. Il faut alors introduire un coefficient de restitution tangentielle e_T , défini par :

$$e_T = -\frac{V_{CT}^+}{V_{CT}^-} \text{ avec } e_T \in [-1,1] \quad [\text{I.8}]$$

La percussion tangentielle (et donc la discontinuité de vitesse tangentielle au point de contact) dépend du caractère glissant ou non-glissant du contact, selon que l'angle d'impact α est supérieur ou inférieur à une valeur critique α_c telle que :

$$\tan \alpha_c = \begin{cases} \frac{3}{2} \mu \frac{1+e_N}{1+e_T} & \text{pour des disques} \\ \frac{7}{2} \mu \frac{1+e_N}{1+e_T} & \text{pour des sphères} \end{cases} \quad [\text{I.9}]$$

Un choc plutôt frontal ($|\alpha| \leq \alpha_c$) est non-glissant et l'on a alors :

$$P_T = \begin{cases} -\frac{m}{3} (1+e_T) V_{CT}^- & \text{pour des disques} \\ -\frac{m}{7} (1+e_T) V_{CT}^- & \text{pour des sphères} \end{cases} \quad [\text{I.10}]$$

Un choc plutôt rasant ($|\alpha| \geq \alpha_c$) est glissant et l'on a alors :

$$P_T = -\mu \operatorname{signe}(V_T) P_N \quad [\text{I.11}]$$

Ces lois ont été testés sur des collisions de sphères [Foerster94] et de disques [Cholet98].

II. Techniques expérimentales

II.A. Écoulements tridimensionnels

La mesure de grandeurs cinématiques au sein d'écoulements tridimensionnels opaques est délicate. On ne peut pas introduire de sondes qui viendraient perturber l'écoulement. Dans un premier temps, on s'est contenté de mesures au niveau des parois transparentes ou à la surface libre. Les mesures ont porté sur la hauteur, la compacité et le débit. La compacité était déterminée en prélevant directement le matériau ou en le récupérant dans des caissons compartimentés. La vitesse était souvent déduite du mouvement des particules en sortie de canal. Ces mesures présentaient une grande dispersion. Le début des années 80 voit le développement de nouvelles techniques comme les fibres optiques et les techniques d'imagerie rapide qui donnent également accès aux fluctuations de vitesse. L'analyse de la microstructure se limite, dans la plupart des cas, à la compacité moyenne. Les efforts sont mesurés grâce à des capteurs de pression situés au niveau des parois. Cependant, ces écoulements sont très sensibles à la présence de parois [Courrech02]. Une solution a alors consisté à rejeter ces parois aussi loin que possible, et à se contenter de mesures à la surface libre.

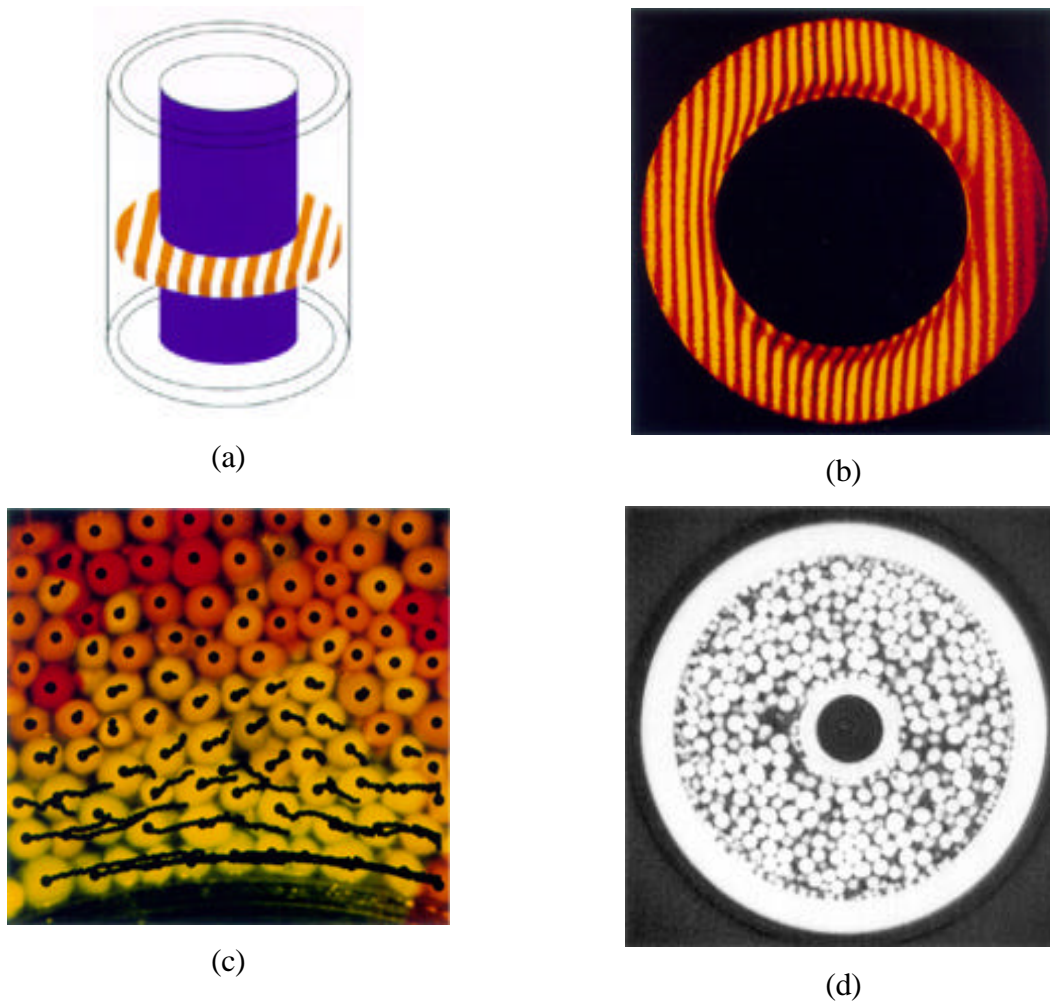


Figure I - 3 : (a) Schéma d'une cellule de cisaillement de type Couette. (b) Imagerie RMN du cisaillement. (c) Imagerie rapide à travers un socle transparent. (d) Coupe horizontale par tomographie X [Mueth00].

Les nouvelles techniques d'investigation non-invasive et non destructive ont commencé à être utilisées récemment (voir figure I-3). C'est le cas de l'imagerie par résonance magnétique nucléaire qui permet d'avoir accès au champ de vitesse au sein d'un écoulement granulaire (voir Annexe 2). Le chapitre IV sera consacré à la mesure du profil de vitesse par IRM dans une conduite verticale. Citons aussi la tomographie par émission de positrons [Wildman00]. On peut également utiliser des techniques de tomographie aux rayons X [Mueth00] ou bien encore la gamma-densimétrie pour accéder au profil de compacité (voir Annexe 1). Il existe également des techniques utilisant des traceurs magnétiques [Dave98] ou bien des techniques optiques utilisant la diffusion multiple de la lumière [Menon97, Pitois00]. Ces techniques sont efficaces, mais sont lourdes à mettre en œuvre. De plus, il faut espérer des progrès quant au temps de mesure et à la résolution spatiale.

II.B. Écoulements bidimensionnels

En confinant le matériau sur une seule couche entre deux parois transparentes, on peut espérer gagner dans la compréhension fine de l'écoulement, puisque l'ensemble des grains est alors visible. Par imagerie rapide et traitement d'image, on accède très facilement à la cinématique et à la structure des écoulements. Naturellement, on peut craindre qu'un tel confinement n'affecte notablement les caractéristiques de l'écoulement, et l'on devra prendre en compte les perturbations introduites par les parois. Cependant, un certain nombre de mécanismes élémentaires vont rester actifs (nature des contacts, réseau des contacts, dilatance, translation, rotation des grains...),. La géométrie bidimensionnelle a permis d'étudier avec succès les comportements sous vibration [Clément92, Warr94], la ségrégation [Clément95], les écoulements confinés en cellule de cisaillement [Howell99], ou à surface libre sur plan incliné [Drake88, Azanza98], ou en tambour tournant [Rajchenbach00, Bonamy02a].

III. Simulations numériques

Les simulations numériques discrètes permettent d'étudier l'écoulement d'une assemblée de quelques milliers de grains, et d'accéder avec toute la précision souhaitée (à chaque pas de temps de calcul) à un grand nombre d'informations inaccessible expérimentalement, en particulier l'évolution temporelle des forces de contact. D'autre part, elles permettent de faire varier les paramètres mécaniques des grains (coefficient de frottement, de restitution normale et tangentielle), mais également de multiplier les "expériences numériques".

La modélisation des interactions de contact, ingrédient majeur de ces méthodes, s'inspire naturellement des modèles qui ont été décrits au Chap I § I. On peut distinguer trois grandes méthodes de simulation numériques : la dynamique moléculaire, la méthode collisionnelle et la dynamique des contacts, dont nous allons présenter très succinctement les idées générales. La méthode de dynamique des contacts, que nous avons utilisée, est détaillée en Annexe 4. Des revues bibliographiques complètes des techniques de simulation, incluant les automates cellulaires et la méthode de Monte Carlo, ont été récemment publiées [Wolf96, Schäfer96, Herrman98].

Les simulations numériques discrètes de milieux granulaires ont été initialement développées pour les évolutions quasi statiques d'empilements granulaires denses [Cundall79]. Elles ont ensuite été adaptées à des situations dynamiques (cisaillement simple, grains vibrés, tambour tournant, écoulements en conduite et sur un plan incliné). Suivant que l'échelle microscopique liée aux déformations locales des particules est négligée ou pas, on parle de sphères *dures* ou *molles*.

III.A. Les méthodes de sphères molles

Ces méthodes, dont les algorithmes de dynamique moléculaires sont l'archétype, ont été historiquement développées pour simuler les liquides [Allen87]. Elles ont ensuite été adaptées aux milieux granulaires [Cundall79] et demeurent encore de nos jours les plus répandues [Herrman98]. Le qualificatif de sphères molles est lié à la déformabilité des grains. Ces méthodes prennent en compte une déformation élastique et un amortissement visqueux pour la partie normale et une loi de frottement tangentielle. La déformation et le temps de contact jouent un rôle crucial.

Une fois les forces de contact déterminées, les positions et les vitesses des particules sont calculées par intégration pas à pas de la relation fondamentale de la dynamique suivant un algorithme prédicteur-correcteur. Le pas d'intégration doit être suffisamment petit devant la durée d'un choc pour pouvoir calculer les forces de contact (environ 100 fois plus petit).

La dynamique moléculaire possède ses limites de validité hors desquelles les prédictions numériques ne sont plus valables. Il existe essentiellement deux artefacts qui ont été mis en évidence récemment. D'une part l'effet de « détachement » [Luding94c, Schäfer95] et d'autre part la « rupture de frein ». L'effet de détachement apparaît lorsque la distance entre les particules devient du même ordre de grandeur que la longueur de pénétration. La méthode sous-estime alors la dissipation d'énergie au cours des chocs, ce qui provoque une séparation artificielle des particules. De même, si au cours d'un choc oblique, le temps de collision devient supérieur au temps que mettraient les particules à se traverser en l'absence de toute interaction, le freinage des particules est sous estimé : c'est l'effet de rupture de frein.

Ainsi, les échelles de longueur et de temps microscopiques, à savoir la longueur de pénétration et la durée d'une collision, doivent rester inférieures aux échelles macroscopiques (libre parcours moyen et temps moyen entre deux collisions). Pour des écoulements dilués, ces deux conditions sont toujours vérifiées. Cependant ce n'est plus le cas pour les écoulements denses où le libre parcours moyen et le temps moyen entre deux collisions divergent quand la compacité est proche de la compacité d'un empilement compact aléatoire.

III.B. Les méthodes de sphères dures

Une simplification naturelle consiste à considérer les grains comme des solides rigides, dont les interactions sont régies par les trois paramètres mécaniques introduits au Chap I § I.A: le coefficient de restitution normal e_N , le coefficient de restitution tangentiel e_T et le coefficient de frottement μ . Dans les méthodes collisionnelles (*Event Driven*) [Allen87, Limon96, Luding94a], ce sont les chocs qui gèrent le processus de simulation.

L'écoulement est considéré comme une succession de collisions binaires. A l'opposé de la dynamique moléculaire, le pas de temps des méthodes collisionnelles est variable : il est d'autant plus petit que la fréquence de collisions est élevée ou la compacité forte. C'est pourquoi leur efficacité est plus grande pour simuler des écoulements dilués. Dans le cas des écoulements denses, l'augmentation brutale de la fréquence de collisions entraîne une divergence du pas de temps qui peut se traduire par un nombre infini de collisions dans un intervalle de temps fini. Cet effet a été décrit par [McNamara92 et 94] et porte le nom de «catastrophe inélastique». Il peut être corrigé dans certaines situations [Luding94a], mais il reste toutefois inhérent à cette méthode de simulation.

Ces deux méthodes de simulation numérique font appel à des modèles d'interaction entre particules qui sont fondamentalement différents. Il n'est donc pas surprenant qu'elles aient chacune un domaine d'application de prédilection. La dynamique moléculaire possède le grand avantage de pouvoir être implémentée avec une grande gamme d'interaction entre particules. Elle est en outre capable de traiter des situations dynamiques variées en terme de compacité et de dissipation d'énergie. Cette grande adaptabilité se fait au détriment du temps de calcul qui est élevé. Dans le cas des écoulements dilués, les méthodes collisionnelles

présentent des performances nettement supérieures. Ces deux méthodes rencontrent néanmoins des difficultés pour traiter des situations où plus de deux particules rentrent en contact simultanément. Or ces situations de "multicontact" maintenu sont fréquentes, dès que la dissipation au sein du matériau devient importante [MacNamara92 et 94, Goldhirsh93]. Une méthode de simulation numérique est particulièrement adaptée à ce type de problème : il s'agit de la dynamique des contacts.

III.C. La dynamique des contacts

Si l'on souhaite maintenir l'hypothèse de solides rigides, mais dépasser la description de l'écoulement comme une succession de collisions binaires, il faut utiliser une méthode développée par Moreau et Jean [Moreau94], appelée dynamique des contacts. L'originalité de cette méthode réside dans l'écriture de lois de contact généralisées qui permettent de décrire les contacts maintenus et les collisions de la même façon, et de traiter ainsi correctement les situations de contact multiple, sans recourir à une régularisation quelconque des lois de contacts. C'est cette méthode que nous avons utilisée dans les simulations numériques. Elle est décrite en détail en Annexe 4.

IV. Principes d'une modélisation

Dans cette partie, nous décrivons les grandes lignes d'une description théorique des écoulements granulaires. Il s'agit donc ici d'introduire les notations et d'identifier les grandeurs étudiées dans les chapitres suivants. Nous n'entrons pas dans la discussion des lois de comportement elles-mêmes qui feront l'objet du chapitre V.

IV.A. Système étudié

On considère l'écoulement gravitaire (gravité g) d'une assemblée de grains secs, de diamètre moyen d et de masse volumique ρ_p . On considère le cas de milieux denses. La compacité v , ou fraction solide (c'est-à-dire la fraction de volume en 3D ou de surface en 2D

occupée par les grains) est donc généralement comprise entre les valeurs de l'empilement désordonné lâche (notée v_m) et de l'empilement désordonné compact (notée v_M) - voir Chap II § I pour plus de détail.

On considère deux géométries de cisaillement bidimensionnel : le plan incliné et la conduite verticale, tous deux à paroi rugueuse. Dans le cas du plan incliné, les paramètres de contrôle sont l'inclinaison θ et le débit Q (ou l'épaisseur H de l'écoulement). Dans le cas de la conduite verticale, on contrôle le débit Q (on notera H la largeur de la conduite).

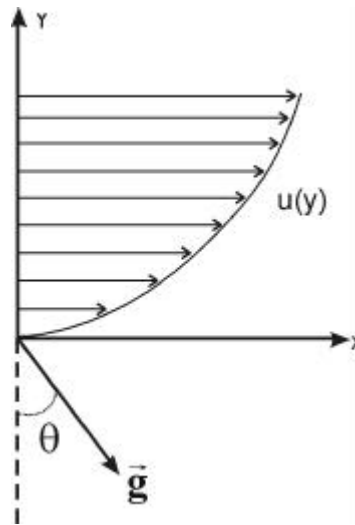


Figure I - 4 : Schéma de l'écoulement.

On note x la direction parallèle à la paroi, orientée dans le sens de l'écoulement, et y la direction perpendiculaire à la paroi, l'origine étant située à la paroi (plus précisément le zéro est pris au centre des grains constituant la rugosité). Les écoulements considérés sont stationnaires uniformes, de sorte que toutes les grandeurs ne dépendent que de y . Le champ de vitesse moyenne se réduit à la composante $u(y)$ selon x . Le débit est alors défini par :

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y) u(y) dy \quad [\text{I.12}]$$

Par ailleurs, on utilisera en général l'approximation des petites inclinaisons :

$$\sin \theta \approx \theta \text{ et } \cos \theta \approx 1 \quad [\text{I.13}]$$

IV.B. Difficultés du passage micro-macro

Les observations les plus immédiates du comportement d'un matériau granulaire en écoulement sont faites à l'échelle macroscopique (débit, frottement,...), c'est à dire à des échelles spatiale et temporelle d'observation assez grandes devant les échelles microscopiques (taille des grains, temps de cisaillement).

Dans certains cas, ces grandeurs macroscopiques peuvent suffire à décrire le comportement du matériau granulaire. Citons ainsi les lois d'échelle exprimant le débit en fonction du diamètre de l'orifice pour un silo (loi de Beverloo [Brown70]) ou en fonction de l'inclinaison et de l'épaisseur sur un plan incliné [Pouliquen99a].

Une description plus fine de l'écoulement (profils de vitesse, de compacité, de contrainte) est cependant utile si l'on veut tester avec précision les modèles rhéologiques. Mais deux questions se posent si l'on veut décrire le matériau granulaire comme un milieu continu, et donc construire des grandeurs moyennes.

D'une part, les écoulements se produisent souvent sur une longueur de l'ordre de quelques diamètres de grain, sur laquelle les grandeurs moyennes peuvent varier notablement. Cette mauvaise séparation d'échelle nous conduira à procéder à des moyennes dans l'espace et le temps, et nous chercherons alors une description continue qui prenne en compte les variations des grandeurs moyenne à une échelle mésoscopique. L'Annexe 5 a pour objet de discuter avec soin la procédure de prise de moyenne.

Par ailleurs, nous verrons (au Chap II § IV) que ces systèmes s'avèrent très fluctuants dans l'espace et le temps, et qu'il peut exister de fortes corrélations dans les mouvements des grains, qui peuvent nécessiter une description non locale.

Une autre difficulté importante concerne les conditions aux limites (paroi solide ou surface libre), qui peuvent requérir un traitement particulier.

IV.C. Equations de conservation

Nous introduisons l'opérateur de dérivation matérielle :

$$D = \partial_t + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \quad [\text{I.14}]$$

qui pour un écoulement stationnaire et uniforme est identiquement nul. Les dérivées selon y seront notées avec un « prime ».

L'équation de conservation de la masse :

$$Dv + v \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \partial_t v + \vec{\nabla} \cdot (v \vec{u}) = 0 \quad [\text{I.15}]$$

se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad [\text{I.16}]$$

qui est automatiquement vérifiée.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$v D\vec{u} = v \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \quad [\text{I.17}]$$

se réduit à :

$$v \vec{g} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \quad [\text{I.18}]$$

où $\underline{\underline{\Sigma}}$ est le tenseur des contraintes. Dans la suite, on notera N et S les contraintes normale Σ_{yy} et de cisaillement Σ_{xy} , comptées positivement. On a donc :

$$\begin{cases} N' = -\rho_p v g \cos \theta \approx -\rho_p v g \\ S' = -\rho_p v g \sin \theta \approx -\rho_p v g \theta \end{cases} \quad [\text{I.19}]$$

La composante Σ_{xx} reste quant à elle indéterminée.

IV.D. Adimensionnement

Dans la suite, nous choisissons d'adimensionner les différentes grandeurs, la longueur par d , le temps par $(d/g)^{1/2}$, la vitesse par $(gd)^{1/2}$, et les contraintes par $\rho_p g d$. Les équations de conservation de la quantité de mouvement s'écrivent alors simplement :

$$\begin{array}{ll} \text{pour la conduite verticale} & \begin{cases} N = \text{cte} \\ S' = -v \end{cases} \\ \text{pour le plan incliné} & \begin{cases} N' = -v \cos \theta \simeq -v \\ S' = -v \sin \theta \simeq -v\theta \end{cases} \end{array} \quad [\text{I.20}]$$

IV.E. Fluctuations du mouvement

Remarquons que dans les matériaux granulaires, l'agitation thermique est complètement inopérante ($k_B T \ll \rho_p g d^4$). On ne peut donc pas utiliser les outils de la thermodynamique comme pour les autres états de la matière (gaz, liquide ou solide). Cependant, lorsque le milieu s'écoule, il existe des fluctuations du mouvement des grains autour du mouvement moyen, que certains modèles prennent en compte. On introduit alors une grandeur qui mesure l'amplitude de ces fluctuations, appelée "température granulaire", et qui prolonge la notion introduite en théorie cinétique. Elle est donc définie par :

$$T(y) = \frac{1}{2} \langle \delta v^2(y) \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle v_y^2(y) \rangle + \langle (v_x(y) - u(y))^2 \rangle \right) \quad [\text{I.21}]$$

Dans le cas d'un écoulement granulaire dense, il est important de bien préciser la procédure de prise de moyenne. En effet, à une échelle de temps inférieure au temps de cisaillement, un grain se trouve "coincé" à l'intérieur de la cage formé par ses proches voisins. On peut observer des fluctuations du mouvement de ce grain à l'intérieur de cette cage, qui définissent une température "micro". A une échelle de temps supérieure au temps de cisaillement, le grain a le temps de s'échapper de sa cage et de sauter par dessus le grain voisin. Les fluctuations de mouvement associés à ce sauts définissent une deuxième température "méso" [Radjaï 02].

De plus, il faut ajouter une équation décrivant l'évolution des fluctuations au sein de l'écoulement. Il s'agit d'une équation de conservation pour l'énergie associée à ces fluctuations de mouvement. Elle s'écrit en 2D :

$$\nu DT = -\sum \overline{\nabla u} - \overline{\nabla} \cdot \overline{Q} - I \quad [\text{I.22}]$$

où Q désigne le flux d'énergie associée à ces mouvements fluctuants, et I désigne le taux de dissipation de l'énergie. Pour un écoulement stationnaire et uniforme, cette équation se réduit à :

$$Su' - Q' - I = 0 \quad [\text{I.23}]$$

IV.F. Conditions aux limites

En plus d'une condition sur l'épaisseur de la couche en écoulement ou le débit, il faut préciser les conditions aux limites, à la paroi et à la surface libre. Celles-ci constituent des lois de comportement aux frontières sur lesquelles nous reviendrons au chapitre V. Ainsi une condition assez naturelle à la surface libre est l'annulation des contraintes, ainsi que l'annulation de la compacité. Au niveau d'une paroi rugueuse, on peut être tenté d'écrire une condition de non-glissement. Enfin, dans le cas d'une conduite verticale, on recherchera des solutions symétriques par rapport au centre de la conduite. En utilisant simplement l'hypothèse d'annulation des contraintes à la surface libre, on obtient pour le plan incliné :

$$\begin{cases} N(y) = \int_y^H v(t) dt \\ S(y) = \theta N(y) \end{cases} \quad [\text{I.24}]$$

IV.G. Loi de comportement

Si l'on néglige le transfert des fluctuations à l'intérieur de l'écoulement, la loi de comportement se réduit à une relation entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement, à travers une viscosité qui peut faire intervenir la compacité. Dans le cas où l'on prend en compte les fluctuations du mouvement, la température interviendra dans la viscosité,

et l'on devra par ailleurs préciser les expressions du flux d'énergie fluctuante (ce qui conduira à construire une conductivité thermique du matériau) et du taux de dissipation de l'énergie. Nous aborderons en détail cette question des lois de comportement au chapitre V.

En conséquence, pour caractériser la loi de comportement du matériau en écoulement, il faudra mesurer les champs de compacité, de vitesse, de contrainte, éventuellement aussi les fluctuations de ces grandeurs.

V. Modèles élémentaires

Nous allons maintenant considérer deux situations extrêmes d'écoulements granulaires pour lesquelles des lois de comportement ont été proposées dans la littérature. La première situation est celle des écoulements très lents où le milieu reste dense et où les grains interagissent à travers des contacts maintenus frottants. C'est le régime de déformation plastique. La deuxième situation est celle des écoulements rapides, plutôt dilués où les grains interagissent uniquement à travers des collisions binaires, et où la théorie cinétique a été appliquée.

V.A. Régime "frictionnel"

Nous considérons d'abord le cas des écoulements très lents où le milieu reste dense et où les grains interagissent à travers des contacts maintenus frottants. Pour la distinguer de la situation où les collisions dominent, nous avons baptisé cette situation régime "frictionnel", même si une dénomination plus adaptée serait sans doute celle de régime de déformations quasi-statiques, au sens où le matériau évolue selon une succession d'états d'équilibre [Combe01]. On cherche alors une loi de comportement reliant contraintes et déformations (et non taux de déformation) [Jackson 83]. C'est le régime étudié par les mécaniciens des sols, à la fois pour des problèmes de stabilité (talus...) et pour des problèmes de tassement (fondations...) [Nedderman92]. Nous nous bornerons à indiquer quelques résultats essentiels.

Le test classique pour étudier les faibles déformations d'un matériau granulaire, mis au point par les mécaniciens des sols, est l'essai triaxial. L'échantillon est placé dans une cellule

cylindrique soumise à une contrainte normale axisymétrique sur le cylindre (équivalente à une pression) et à une contrainte verticale selon l'axe du cylindre. Le matériau est soumis à une différence de contraintes normales et se déforme. On mesure la déformation axiale et la déformation volumique. En pratique, c'est le taux de déformation axiale qui est contrôlé. Lorsque la déformation axiale augmente, on observe une augmentation du déviateur des contraintes, puis un palier correspondant à une déformation plastique. L'état initial (dense ou lâche) introduit quelques nuances, particulièrement pour ce qui est de la déformation volumique (contractance ou dilatance respectivement). En grande déformation, les états de contrainte et de volume tendent vers un état d'équilibre indépendant des conditions initiales, appelé état critique ou de plasticité parfaite [Schofield68], caractérisé par sa densité qui ne dépend que de la contrainte moyenne. Dans la mesure où les déformations élastiques sont très faibles devant les déformations plastiques, on peut utiliser un modèle rigide-plastique (plutôt qu'un modèle élasto-plastique).

Avant d'atteindre l'état critique, on peut aussi observer la rupture du matériau par localisation de la déformation. Le critère de rupture ($F(\underline{\underline{\sigma}}) = 0$) définit l'état de contrainte où l'on atteint le régime plastique. Si ce critère n'évolue pas, on parle de plasticité parfaite. Le critère de rupture de Mohr-Coulomb peut être utilisé en première approximation. Ce critère énonce qu'un point d'un matériau granulaire est stable si pour tout couple d'orientation (\mathbf{n}, \mathbf{t}) , les contraintes normales et tangentielles vérifient l'inégalité stricte :

$$|\sigma_t| < \sigma_n \tan \phi \quad [\text{I.25}]$$

Lorsque l'égalité est atteinte ($|\sigma_t| = \sigma_n \tan \phi$), le matériau s'apprête à glisser dans la direction \mathbf{t} . Le critère s'écrit donc $F(\underline{\underline{\sigma}}) = |\tau| - \sigma_n \tan \phi$. ϕ est appelé angle de frottement interne du matériau (d'ordre 30° dans les sols). Ce critère est analogue à la loi de Coulomb locale, mais l'angle de frottement interne ϕ dépend non seulement du coefficient de frottement μ entre grains, mais aussi de la forme des grains et de la géométrie de l'empilement (granulométrie, compacité).

A travers la donnée d'un potentiel plastique $G(\underline{\underline{\sigma}})$, la règle d'écoulement permet de calculer le taux de déformation $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}$ au seuil de rupture : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \lambda \partial G / \partial \underline{\underline{\sigma}}$. Cette règle donne la

direction de l'écoulement, mais non son amplitude. Si $G = F$ (c'est le cas des métaux), on parle de plasticité associée, et l'on a coaxialité des contraintes et des déformations : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = -\lambda \tan \phi = -\dot{\gamma} \tan \phi$. Mais, dans les matériaux granulaires, $G \neq F$, et l'on parle de plasticité non-associée. On introduit alors un angle de dilatance β différent de l'angle de frottement. Il n'y a pas coaxialité des contraintes et des déformations : $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = -\dot{\gamma} \tan \beta$. Un modèle tenant compte du frottement et de la dilatance a été proposé pour décrire l'effet de la densité sur l'angle d'avalanche [Evesque91].

L'analyse de la rupture d'un massif granulaire retenu par un mur permet de définir deux états extrêmes, correspondant à la situation où le mur pousse ("état actif") et où le mur retient ("état passif"). La contrainte principale est alors respectivement verticale et horizontale. Cette analyse fournit une expression du rapport entre la pression verticale et la pression horizontale, appelé coefficient de Rankine :

$$K = \frac{1 \pm \sin \phi}{1 \mp \sin \phi} \quad [\text{I.26}]$$

Ce régime de faible déformation a aussi fait l'objet d'études micromécaniques [Oda99], à l'échelle du réseau de contacts entre les grains, grâce à des simulations numériques discrètes, des expériences sur matériaux modèles, et des modélisations fondées sur des hypothèses quant à la distribution des forces de contact ("texture"). Ces études ont permis de mesurer cette distribution [Radjai01a] (statistique de l'intensité des forces, de la mobilisation du frottement, anisotropies), de discuter l'origine microscopique du comportement élasto-plastique observé dans l'essai triaxial [Combe01, Roux02] (déformation des grains versus enrichissement du réseau de contact), de tester des modèles de distribution des contraintes en géométrie confinée [Ovarlez02], de mesurer la répartition des forces sous une contrainte localisée à la surface d'un tas [Reydallet02], ou encore de proposer une interprétation géométrique de l'écrouissage [Radjai01b].

V.B. Régime "collisionnel"

Dans cette situation d'écoulements dilués et rapides, les collisions sont prédominantes et sont responsables des transferts de quantité de mouvement et d'énergie au sein de l'écoulement.

C'est Bagnold qui en 1954 [Bagnod54], à partir d'une expérience de cisaillement rapide d'une suspension concentrée, met en évidence ce qu'il a appelé le régime d'inertie des grains. Dans ce régime, il observe que les deux composantes du tenseur des contraintes (normale N et de cisaillement S) sont proportionnelles au carré du taux de cisaillement, qu'elles présentent une forte dépendance en compacité, et enfin que leur rapport est une constante baptisée angle de frottement dynamique (environ 20° dans l'expérience de Bagnold) :

$$\begin{pmatrix} N \\ S \end{pmatrix} = f(v) \dot{\gamma}^2 \begin{pmatrix} \cos \phi_D \\ \sin \phi_D \end{pmatrix} \quad [\text{I.27}]$$

Cette loi de comportement est différente de celle d'un fluide newtonien, et la pression normale, qualifiée de pression dispersive, introduit un effet de dilatance.

Il interprète ce résultat à partir d'une image de l'écoulement structuré en couches qui glissent les unes sur les autres, avec une vitesse relative moyenne entre deux couches $V = \dot{\gamma}d$. Le transfert de quantité de mouvement moyen $\Delta \vec{p}$ lors de la collision entre deux grains de deux couches voisines (intervenant avec un angle d'impact ϕ_i par rapport à la direction orthogonale à l'écoulement) vaut :

$$\begin{cases} \Delta p_x = 2mV \sin^2 \phi_i \\ \Delta p_y = 2mV \sin \phi_i \cos \phi_i \end{cases} \quad [\text{I.28}]$$

Le tenseur des contraintes est alors égal à cet échange de quantité de mouvement par unité de surface et par unité de temps. Dans un milieu dense, l'unité de surface est de l'ordre de d^2 . L'unité de temps est la fréquence des chocs, égale à V/s en notant s la distance moyenne entre grains. Enfin, il est facile de voir qu'en dimension D , dans un milieu dense (c'est à dire s

$< d$), s est relié à l'écart à la compacité maximale de l'empilement v_M (voir chapitre II § I.A) par :

$$s \simeq \frac{d}{v_M D} (v_M - v) \quad [\text{I.29}]$$

Au total, ce scénario prédit donc les différentes observations, en interprétant l'angle de frottement dynamique comme l'angle d'impact:

$$\begin{pmatrix} N \\ S \end{pmatrix} \sim \rho_d d^2 \frac{\dot{\gamma}^2}{v_M - v} \begin{pmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{pmatrix} \quad [\text{I.30}]$$

Un tel modèle prédit que le tenseur des contraintes dépend de la compacité et du taux de cisaillement.

Cependant, ce modèle s'avère incapable de décrire les écoulements collisionnels dans lesquels le taux de cisaillement s'annule en certains points (par exemple au centre d'une conduite verticale). Il a fallu attendre une vingtaine d'années pour que soit prises en compte dans la loi de comportement les fluctuations de vitesse, introduite la notion de "température granulaire" (définie par l'Eq. (I-21)) [Ogawa80], et que soit ainsi faite l'analogie entre un écoulement granulaire et un gaz dense [Savage81]. Au cours des années 80, les chercheurs se sont alors inspirés de la théorie cinétique des gaz [Chapman70] pour tenter de fournir une modélisation continue des écoulements granulaires collisionnels [Campbell90]. Il faut attendre 1983 pour voir les trois lois de conservation (masse, impulsion et énergie) formulées de manière définitive par [Jenkins83].

Les hypothèses fondamentales de la théorie cinétique des milieux granulaires sont que les grains interagissent par des collisions binaires non corrélées (chaos moléculaire), que ces interactions sont faiblement dissipatives (coefficient de restitution voisin de l'unité, faible coefficient de frottement). Les collisions sont supposées instantanées, plus précisément le temps de libre parcours moyen est supposé grand devant le temps du contact. Enfin, il est supposé que la vitesse de cisaillement est petite devant les fluctuations de vitesse ($d\dot{\gamma} \ll \sqrt{T}$).

A la différence des gaz, les écoulements granulaires s'effectuent sur une petite épaisseur (quelques dizaines de grains) où existent de fortes inhomogénéités (profil de compacité, vitesse moyenne, fluctuations de vitesse). De ce fait, les conditions aux limites ont un rôle important sur l'écoulement. Surtout, les collisions sont inélastiques (coefficient de restitution et de frottement), en conséquence de quoi, il faut fournir de l'énergie au milieu granulaire (gravité, vibration, cisaillement) pour que l'écoulement puisse se maintenir. Notons d'emblée que les fluctuations de vitesse sont, par nature, du même ordre de grandeur que la vitesse de cisaillement : $\delta v \sim \dot{\gamma}d$, à la différence d'un gaz où $\delta v \gg \langle v \rangle$.

Nous ne rentrons pas ici dans le détail des modèles (pour cela nous renvoyons à la revue de [Azanza98]) mais nous indiquons les conclusions en terme de loi de comportement.

L'analyse heuristique de [Haff83] permet d'identifier les deux coefficients de transport intervenant dans la réponse linéaire du système au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ par la contrainte de cisaillement S et au gradient de température T' par le flux de chaleur Q . Il s'agit de la viscosité η et de la conductivité thermique κ :

$$\begin{cases} S = \eta \dot{\gamma} \\ Q = -\kappa T' \end{cases} \quad [\text{I.31}]$$

De plus, cette analyse permet de comprendre les dépendances en compacité et température de la pression et des deux coefficients de transport. On retrouve les dépendances connues dans les gaz (dilués ou denses) :

$$N \sim \rho_p d \begin{cases} vT & \text{milieu dilué} \\ \frac{T}{v_M - v} & \text{milieu dense} \end{cases} \quad [\text{I.32}]$$

$$\eta, \kappa \sim \rho_p d \begin{cases} T^{1/2} & \text{milieu dilué} \\ \frac{T^{1/2}}{v_M - v} & \text{milieu dense} \end{cases} \quad [\text{I.33}]$$

On trouve de plus l'expression du taux de dissipation de l'énergie associée à l'inélasticité des collisions, qui n'existe pas dans les gaz moléculaires :

$$I \sim \frac{\rho_p}{d} (1 - e^2) \begin{cases} T^{3/2} & \text{milieu dilué} \\ \frac{T^{3/2}}{v_M - v} & \text{milieu dense} \end{cases} \quad [\text{I.34}]$$

On retrouve ainsi la divergence des différentes grandeurs au voisinage de la compacité maximale. Dans la suite, on raisonnera en grandeurs adimensionnées (i.e, les préfacteurs $\rho_p d, \rho_p / d$ disparaissent).

Cependant, l'approche précédente ne donne que les comportements qualitatifs, et ne fournit pas les préfacteurs. L'utilisation du formalisme de l'équation de Boltzmann, qui prend en compte la distribution des vitesses et les corrélations spatiales, fournit une description quantitative des lois de comportement, valable pour toute compacité (régime collisionnel et cinétique) [Jenkins83, Lun84, Jenkins85, Lun91, Goldstein95]. On obtient alors les dépendances suivantes en compacité et température :

$$\begin{cases} N = F_N(v) T \\ S = F_S(v) T^{1/2} \dot{\gamma} \\ Q = -F_Q(v) T^{1/2} T' \\ I = F_I(v) T^{3/2} \end{cases} \quad [\text{I.35}]$$

Les fonctions de la compacité s'écrivent comme la somme de deux contributions correspondant aux régimes cinétique et collisionnels (i.e. libre parcours moyen petit ou grand devant la taille des grains) :

$$F_i(v) = F_i^{\text{cin}}(v) + F_i^{\text{coll}}(v) \quad [\text{I.36}]$$

Dans la limite dense ($v \geq 0,2$ en 2D), seule la contribution collisionnelle subsiste, et l'on peut alors écrire :

$$\begin{cases} N = A_N F(v) T \\ S = A_S F(v) T^{1/2} \dot{\gamma} \\ Q = -A_Q F(v) T^{1/2} T' \\ I = A_I F(v) T^{3/2} \end{cases} \quad [\text{I.37}]$$

La dépendance en compacité est la même pour toutes les grandeurs. Elle s'exprime en fonction de la fonction de corrélation de paire (ou de distribution radiale lorsque le milieu est homogène, isotrope et à l'équilibre) $g_0(v)$:

$$F(v) = v^2 g_0(v) \quad [\text{I.38}]$$

L'expression de la fonction de corrélation de paire a été déterminé par [Carnahan69] en dimension 3 et par [Verlet82] en dimension 2 :

$$\begin{cases} g_0^{2D}(v) = \frac{(2-v)}{2(1-v)^3} \\ g_0^{3D}(v) = \frac{(16-7v)}{16(1-v)^2} \end{cases} \quad [\text{I.39}]$$

Remarquons en particulier que dans cette limite du régime collisionnel, le rapport du taux de cisaillement sur les fluctuations de vitesse est égal à une simple fonction du rapport des contraintes S et N (appelé coefficient de frottement effectif, par analogie avec la loi de Coulomb) :

$$\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{T}} = \frac{A_N}{A_S} \frac{S}{N} \quad [\text{I.40}]$$

Il ne reste plus qu'à connaître les préfacteurs A_i . Ceux-ci dépendent uniquement du coefficient de restitution. En posant $r = (1+e)/2$, ils prennent l'expression suivante :

$$\begin{cases} A_N^{2D} = 2r \\ A_S^{2D} = \frac{r}{4\sqrt{\pi}(5-3r)} (3\pi r^2 - 2(\pi+6)r + 20) \\ A_Q^{2D} = \frac{\sqrt{\pi}r^2}{r(17-15r)} \left(9r^2 - \left(\frac{30}{\pi} + \frac{27}{4} \right) r + \frac{34}{\pi} \right) \\ A_I^{2D} = \frac{16r(1-r)}{\sqrt{\pi}} \end{cases} \quad [\text{I.41}]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_N^{3D} = 4r \\ A_S^{3D} = \frac{2r}{15\sqrt{\pi}(2-r)}((3r-2)\pi + 12(2-r)) \\ A_Q^{3D} = \frac{\sqrt{\pi}r}{(41-33r)}\left(9r(4r-3) + \frac{4}{\pi}(41-33r)\right) \\ A_I^{3D} = \frac{48r(1-r)}{\sqrt{\pi}} \end{array} \right. \quad [I.42]$$

Pour pouvoir traiter un problème d'écoulement, il faut de plus disposer de conditions aux limites, à la fois aux parois et à la surface libre. Au niveau d'une paroi, on devra écrire comment se font les transferts de quantité de mouvement et d'énergie. Ceci fournit alors deux relations à la paroi, l'une entre la vitesse de glissement et la température, l'autre entre le flux de chaleur et la dissipation d'énergie. Dans le cas d'une paroi rugueuse constituée de grains collés, une analyse quantitative complète est possible. A la surface libre, on peut écrire l'annulation des contraintes. Cependant, on doit remarquer qu'en toute rigueur, la théorie cinétique cesse d'être valable lorsque les grains adoptent des trajectoires balistiques. Dans la partie supérieure de l'écoulement, la situation est celle d'une atmosphère isotherme [Azanza99] : la température reste constante, et la compacité décroît exponentiellement. On pourra donc choisir de n'utiliser la théorie cinétique que jusqu'à la valeur de la compacité correspondant à cette transition.

Plusieurs études expérimentales et par simulations numériques discrètes ont été menées pour tester les prédictions de la théorie cinétique des milieux granulaires, dans diverses géométries : cisaillement simple [Savage84, Hanes85, Hopkins90, Walton93a], grains vibrés [Rajchenbach00, Warr94, Rouyer01, McNamara94], conduite verticale [Reydellet02, Valance98], plan incliné [Azanza99]. Nous renvoyons à [Azanza98 et 99] pour une revue assez complète de ces travaux.

Nous voudrions conclure sur les limites de la théorie cinétique des milieux granulaires lorsque les grains deviennent plus dissipatifs (soit du fait d'une plus faible restitution, soit du fait du frottement). L'introduction du frottement dans la théorie cinétique conduit à prendre en compte la rotation des grains. Il faut alors ajouter aux trois lois de conservation habituelles deux autres relations exprimant la conservation du moment cinétique et de l'énergie de rotation [Lun91]. Pour ce qui concerne la restitution normale dans les chocs, il apparaît que la

théorie cinétique peut être utilisée tant que le coefficient de restitution e est supérieur à environ 0,7. Pour des valeurs inférieures, il faut prendre en compte des moments d'ordre supérieur des vitesses fluctuantes, de sorte que la température et les contraintes normales deviennent anisotropes. Par ailleurs, les particules tendent à former des amas [Hopkins90, Goldhirsch93, McNamara94, Kadanoff99]. On passe donc à un régime de contacts multiples corrélés.

CHAPITRE II

ECOULEMENTS DENSES DE GRAINS SECS

ETAT DE L'ART

CHAPITRE II

ÉCOULEMENTS DENSES DE GRAINS SECS

ÉTAT DE L'ART

Dans ce chapitre, inspiré de la revue de [Pouliquen02a], nous dressons un tableau des connaissances sur les écoulements denses de grains secs, qui ont récemment été l'objet de nombreux travaux expérimentaux ou numérique, en général sur systèmes modèles (assemblées assez monodisperses de disques ou de sphères). Nous nous restreignons aux géométries de cisaillement simple (confiné ou à surface libre) autorisant l'étude d'écoulements stationnaires et uniformes. Nous insistons sur la mesure des grandeurs permettant de discuter la loi de comportement : profils de vitesse, de compacité, des contraintes... Nous comparerons ces résultats avec nos résultats expérimentaux ou numériques dans les deux chapitres suivants. La discussion des lois de comportement elles-mêmes n'interviendra qu'au chapitre V.

I. Milieux granulaires denses

I.A. Compacité

Nous allons commencer par situer la gamme de compacité ν qui nous intéressera dans la suite. Pour cela, nous proposons une discussion de l'évolution de la structure d'un milieu granulaire en fonction de sa compacité.

L'étude des gaz de sphères dures non dissipatives sur toute la gamme de compacité indique une situation assez compliquée, avec plusieurs transitions de phase pour des valeurs particulières de la compacité [Poon95, Richard99]. Aux faibles compacités (milieu dilué), les grains sont séparés les uns des autres (mais entrent en contact lors des collisions). Il s'agit d'une fluide désordonné. Lorsque la compacité augmente, une première transition de phase dite de "gel" a lieu pour une compacité ν_1 , au-delà de laquelle existent deux branches. Sur l'une d'entre elles, il y a coexistence entre une phase désordonnée et une phase cristalline, la phase désordonnée disparaissant à une compacité ν_2 , et le milieu peut se compacter jusqu'à la

compacité maximale de l'état cristallin v_C (structure cubique face centrée). Sur l'autre branche, métastable, le milieu reste fluide jusqu'à une compacité v_V , au-delà de laquelle il est dans un état vitreux (transition vitreuse). Le milieu peut alors se compacter jusqu'à une compacité maximale v_M , dite d'empilement désordonné compact. Pour les sphères dures, les valeurs respectives de ces compacités sont : $v_1 \approx 0,49$, $v_2 \approx 0,54$, $v_C = \pi / 3\sqrt{2} \approx 0,74$, $v_V \approx 0,58$ et $v_M \approx 0,64$.

Pour les disques durs, la situation est un peu contrastée : il existe toujours une transition de gel [Torquato95] ($v_1 \approx 0,67$), mais il n'y a pas de transition vitreuse. Les compacités maximales d'empilements ordonnés ou désordonnés valent respectivement $v_C = \pi / 2\sqrt{3} \approx 0,91$ et $v_M \approx 0,82$ [Gervois93].

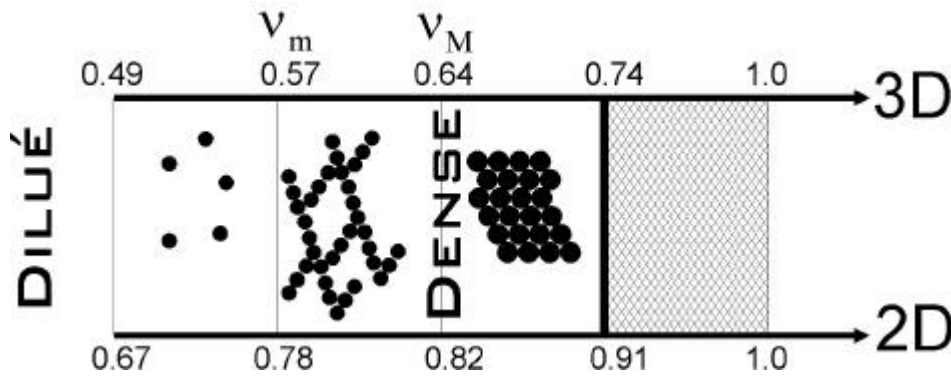


Figure II - 1 : Structure et compacité des milieux granulaires (2D et 3D).

Cependant, contrairement à l'analyse précédente, nous allons dans la suite considérer des grains dénués d'agitation thermique. Pour des questions d'encombrement stérique, il s'établit un réseau de contacts entre grains, dont la densité peut être mesurée par la coordinance z (c'est-à-dire le nombre moyen de contacts par grain). Notons par ailleurs que le caractère dissipatif des contacts favorisera la formation d'amas [Goldhirsch93]. En terme de connexité de ce réseau, on peut ainsi définir une compacité v_m , à partir de laquelle le réseau s'étend à travers tout l'échantillon, ce qui évoque un seuil de percolation. On parle alors d'empilement désordonné lâche. Dans un écoulement, il faut plutôt retenir l'image d'une percolation dynamique ou "brassée", dans la mesure où ce réseau est en constante réorganisation. Des mesures de cette compacité critique réalisées par simulation numérique du cisaillement simple d'assemblées de disques ou de sphères monodisperses [Lun94, Aharonov99] ont donné $v_m = \pi/4 \approx 0,78$ pour des disques, et $v_m = \pi/6 \approx 0,52$ pour des sphères (structure cubique simple). D'autres expériences numériques [Onoda90], concernant la

stabilité d'empilements de sphères, montrent plutôt que $v_m \approx 0,57$. En terme de coordinance, on aurait pour les cas des disques $z = 3 \text{ à } v_m$ et $z = 4 \text{ à } v_M$ [Hinrichsen90].

Une polydispersité suffisante (supérieure à 15% selon [Luding00]) empêche la cristallisation. Des valeurs des compacités critiques pour des milieux polydisperses ont été mesurées par [Troadec93].

I.B. Dilatance

Lorsque l'on cisaille un milieu granulaire, celui-ci devra se dilater si la compacité est assez élevée. Ceci définit une autre valeur critique de la compacité qui semble être la même que celle de l'empilement désordonné lâche.

Ainsi, si l'on considère la déformation quasi-statique d'un empilement dense de grains, comme dans un essai triaxial, on observe une évolution de la compacité. Selon que la compacité initiale est supérieure ou inférieure à une compacité critique (milieu granulaire "lâche" ou "dense"), l'échantillon va se contracter ou se dilater jusqu'à atteindre cette valeur critique de la compacité. Cet effet de dilatance, correspondant au désenchevêtrement des grains imbriqués les uns dans les autres a été mis en évidence par Reynolds en 1885 [Reynolds85]. On peut alors définir un angle de dilatance β qui mesure la propension du milieu à se dilater sous cisaillement [Rowe62].

Lorsque la vitesse de cisaillement augmente, on peut s'attendre à une intensification de la dilatation du milieu granulaire, car il s'ajoute à l'effet géométrique précédent un effet dynamique associé aux collisions entre grains, qui engendre une pression interne. C'est un effet sur lequel on reviendra au chapitre V.

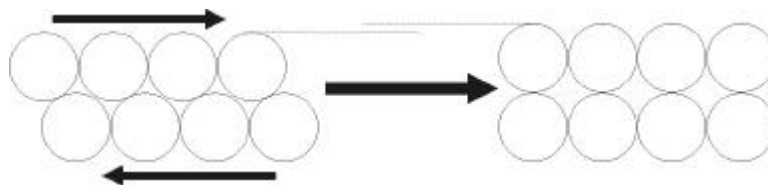


Figure II - 2 : Dilatance sous cisaillement.

Au total, les milieux granulaires denses que nous considérerons dans la suite auront en général une compacité légèrement inférieure à v_m . Ils seront plutôt désordonnés et sujets à dilataance.

Notons enfin qu'Azanza avait proposé une classification des régimes d'écoulement de disques monodisperses (cinétique, collisionnel, dense, bloc) en fonction de leur compacité [Azanza98]. Dans cette étude, les écoulements étaient qualifiées de denses pour une compacité entre 0,6 et 0,82.

II. Géométries d'étude

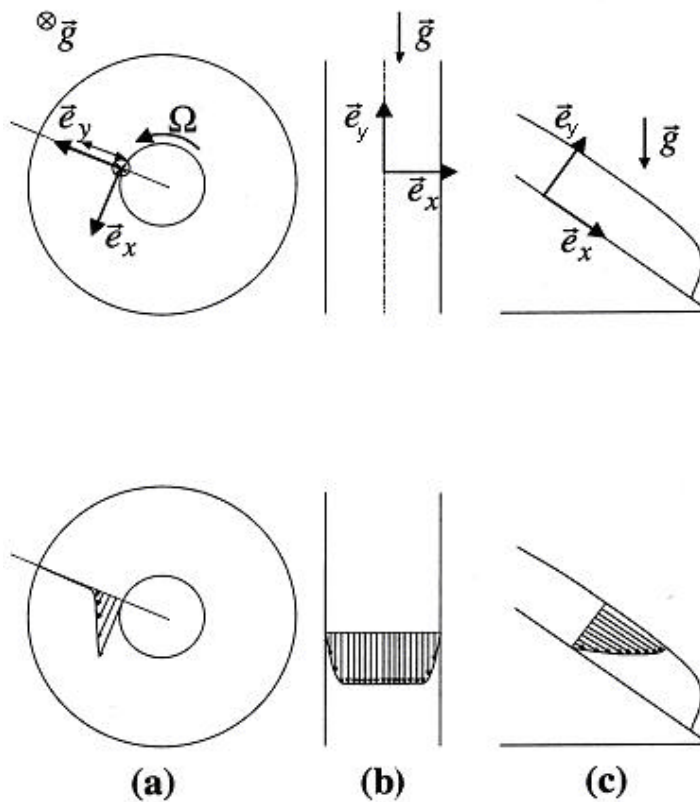


Figure II - 3 : Principales géométries d'étude des écoulements granulaires.

a: Couette - b: Conduite verticale – c: Plan incliné sur socle fixe ou meuble

(d'après [Bonamy01]).

Quatre géométries d'écoulement granulaire sont habituellement étudiées (figure II-3). Ces géométries simples permettent d'imposer un cisaillement uniforme, et de mesurer simultanément la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement, autorisant la comparaison avec les modèles rhéologiques (écoulement "viscosimétrique").

II.A. Ecoulements confinés

Une première situation d'intérêt est celle où le matériau granulaire s'écoule tout en restant confiné entre des parois (généralement rugueuses), ce qui contrarie la dilatance sous cisaillement du matériau.

Dans la première configuration (cellule de cisaillement), l'écoulement est imposé par le mouvement d'une paroi. La géométrie des cylindres coaxiaux (Couette) est classique en rhéométrie (en général c'est le cylindre intérieur qui tourne, et l'entrefer est de quelques dizaines de grains) [Miller96, Tardos98, Schwarz98, Howell99, Veje99, Schöllman99, Lätzel00, Losert00, Mueth00, Mueth01, daCruz02a]. Des études numériques ont aussi été menées dans la géométrie plan-parallèle [Babic90, Thompson91, Zhang92, Aharonov99, Aharonov02, daCruz02b]. En dehors de la pression de confinement, on peut imposer soit la vitesse de cisaillement, soit la contrainte de cisaillement.

Dans la deuxième configuration, la conduite verticale, le moteur de l'écoulement est la gravité. On contrôle alors le débit soit par l'ouverture de l'orifice, soit par la descente d'un piston.

II.B. Ecoulements à surface libre

Une deuxième situation d'intérêt est celle où il existe une surface libre. Dans une première configuration, appelée plan incliné, le matériau s'écoule sur un socle fixe, généralement rugueux (voir revue plus loin). Les paramètres de contrôle sont alors l'inclinaison et le débit.

Il peut s'agir aussi d'un écoulement sur un socle meuble, à la surface d'un tas [Lemieux00, Khakhar01, Andreotti01b, Komatsu01]. Il n'existe alors qu'un seul paramètre de

contrôle, le débit, l'inclinaison de la pente s'ajustant d'elle-même. Les écoulements dans un tambour tournant font partie de cette catégorie, le débit étant contrôlé par la vitesse de rotation du cylindre [Nakagawa93, Rajchenbach00, Bonamy02a, Gray01]. On distingue alors une zone solide ou statique (où les grains conservent leurs voisins) d'une zone fluide en écoulement.

Dans chacune de ces quatre situations d'écoulements, on observe, dans une certaine gamme des paramètres de contrôle, des écoulements stationnaires et uniformes. C'est à ceux-ci que pour l'essentiel, nous restreindrons notre analyse des points communs et des différences entre géométries, afin d'identifier les mécanismes de base qui gouvernent les écoulements granulaires denses. Nous commencerons par décrire ces quatre configurations en terme de cinématique et de structure. Nous discuterons ensuite les propriétés de ces écoulements à l'échelle des grains.

III. Structure et cinématique

III.A. Cellule de cisaillement

La cellule de cisaillement est un outil expérimental classique en rhéologie, qui permet de mesurer les contraintes de cisaillement et éventuellement d'observer le profil de vitesse (par IRM ou à la paroi). Une première observation est qu'un écoulement stationnaire n'est possible qu'au-delà d'un certain taux de cisaillement [Thompson91, Nasuno98] ou d'une certaine contrainte de cisaillement [daCruz02a]. En dessous, on observe des instabilités de *stick-slip*. En régime stationnaire, le profil de vitesse reste localisé près de la paroi en mouvement, sur une couche de cisaillement de l'ordre de cinq à dix grains. La décroissance est exponentielle pour des particules sphériques monodisperses et devient gaussienne lorsque l'angularité ou la polydispersité augmente [Mueth00]. On observe par ailleurs une dilatation du matériau dans la couche de cisaillement [Veje99, Schöllmann99, Lätzel00]. La forme de ces profils de vitesse et de compacité semble indépendante de la vitesse de cisaillement.

Cette localisation du cisaillement au voisinage des parois en mouvement, en géométrie confinée, est connue de longue date pour les faibles déformations [Corfdir01]. De telles

bandes de cisaillement apparaissent aussi dans les essais triaxiaux, près de la rupture du matériau granulaire sous contrainte [Mokni92, Desrues96], cette fois-ci avec des orientations particulières au sein de l'échantillon, liées à un critère de bifurcation [Vardoulakis95]. L'épaisseur de ces bandes de cisaillement est de l'ordre d'une dizaine de grains. Leurs caractéristiques dépendent du taux de cisaillement, du niveau de confinement, et des caractéristiques du matériau (granulométrie). Elles sont le siège d'une dilatation assez marquée du matériau.

Des mesures des composantes du tenseur des contraintes à la paroi, expérimentales [Savage84, Hanes85, Tardos98, daCruz02a] et numériques [Babic90, Thompson91, Zhang92, Aharonov99, Aharonov02, daCruz02b], ont été réalisées pour différents taux de cisaillement, compacité et pression de confinement. A compacité constante, elles mettent en évidence une transition entre un régime indépendant du taux de cisaillement et un régime quadratique [Babic90, Aharonov99]. A pression de confinement constante, elles montrent une augmentation de la contrainte de cisaillement avec le taux de cisaillement [Thompson91, Tardos98, daCruz02b]. Par ailleurs, la contrainte de cisaillement augmente lorsque la compacité augmente [Losert00].

III.B. Conduite verticale

Le cas des écoulements en conduite verticale sera l'objet de l'étude du chapitre IV. Nous excluons de notre discussion la zone de convergence de l'écoulement à proximité de l'orifice, appelée trémie, qui selon l'angle d'ouverture permet d'obtenir soit un écoulement en masse (angle faible), soit un écoulement en cheminée, avec des zones stagnantes près des parois (angle plus important).

Nous excluons aussi les effets du fluide interstitiel, qui peut être responsable d'une dépendance du débit en fonction de la longueur de la conduite, si la conduite est alimentée en amont, mais aussi d'ondes de densité [Wu93, Bertho02].

Nous considérons le cas d'un écoulement dense dans une conduite verticale, dont le débit est contrôlé par l'orifice en aval. L'écoulement n'est pas possible pour des orifices trop petits du fait de la formation de voûtes [To01]. Le débit de vidange Q est indépendant de la

hauteur de matériau contenu en amont de la trémie, et ne dépend que du diamètre D de l'orifice, suivant la loi de Beverloo [Brown70, Lançon96] :

$$\begin{cases} Q \sim \rho \sqrt{g} (D - kd)^{5/2} & \text{en 2D} \\ Q \sim \rho \sqrt{g} (D - kd)^{3/2} & \text{en 3D} \end{cases} \quad \text{[II.1]}$$

où $\rho = \rho_p \nu$ est la compacité du matériau, d la taille des grains, g la gravité et k un nombre sans dimension voisin de 1 associé à la zone d'exclusion pour les grains au périmètre de l'orifice.

Assez loin au-dessus de l'orifice, on observe un régime régulier et uniforme [Nedderman80, Natarajan95, Pouliquen96a, Menon97, Denniston99]. L'écoulement est de type bouchon : le cisaillement est localisé sur des zones très fines au voisinage des parois (quelques couches de grains). L'épaisseur des zones de cisaillement (cinq à dix grains) change très peu avec la largeur de la conduite mais peut varier si la conduite est inclinée [Pouliquen96a]. On observe une dilatation du matériau près des parois.

Cependant, l'écoulement peut devenir intermittent pour une certaine gamme de taux de cisaillement [Baxter89]. L'apparition d'ondes de densité plus ou moins périodiques, en l'absence de fluide interstitiel, a été observée expérimentalement [LePennec96, Valance98, Horlück01, Tsai02] et associée à la dilatance du milieu granulaire. Ces intermittences de l'écoulement sont connues pour engendrer des vibrations dans les silos ("musique des silos") [Tejchman93].

III.C. Plan incliné

Les écoulements sur plan incliné feront l'objet de l'étude détaillée décrite au chapitre III. Nous nous limitons donc ici aux principales tendances.

III.C.1. Seuil d'écoulement

La première observation, valable à la fois pour le plan incliné et le socle meuble, est l'existence d'un seuil d'écoulement. En effet, un empilement de grains ne peut être incliné que jusqu'à un angle θ_{start} dit angle de stabilité maximale ou encore angle statique (c'est-à-dire correspondant à une transition statique-dynamique), au-delà duquel se déclenche une avalanche. L'inclinaison est alors réduite à une valeur inférieure θ_{stop} , angle de repos ou encore angle dynamique (c'est-à-dire correspondant à une transition dynamique-statique). L'écart entre ces deux angles est de quelques degrés. Les valeurs typiques vont de 25° (billes de verre) à 40° (sable anguleux). En plus de certaines caractéristiques des grains (coefficient de frottement, forme), ces angles dépendent de la densité [Daerr99b] et du confinement [Courrech02]. La première interprétation de la différence entre ces deux angles a été proposée par [Bagnold54] à partir de la notion de dilatance. De fait, on observe expérimentalement une dilatation de la couche superficielle avant une avalanche granulaire [Thompson91, Zhang92].

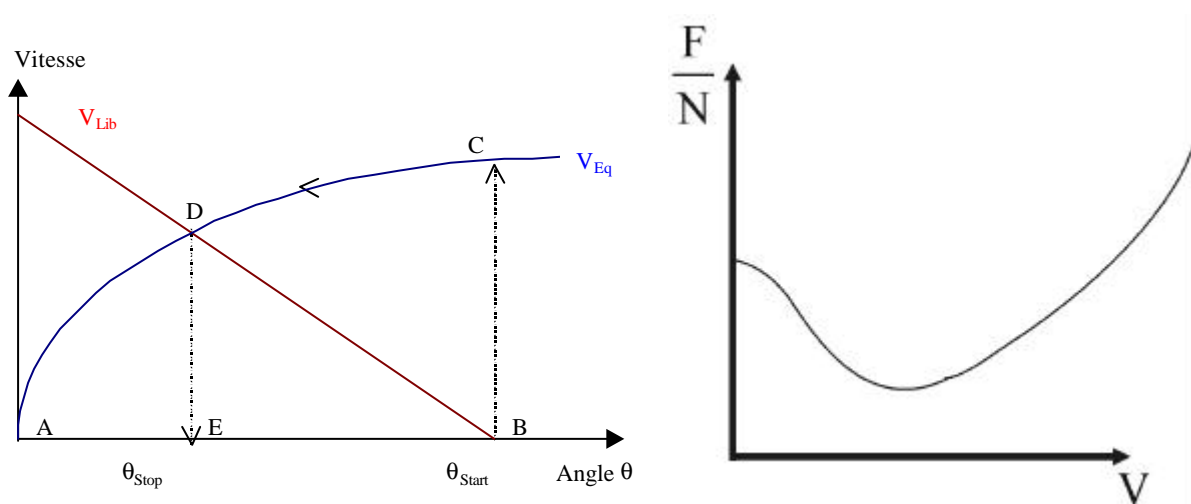


Figure II - 4 : Modèles de Quartier et de Jaeger.

Dans le cas d'un plan incliné rugueux, une simplification extrême du problème consiste à étudier le mouvement d'un grain unique [Quartier00]. Diverses études expérimentales et numériques ont été menées en fonction de l'inclinaison et du rapport entre les tailles du grain mobile et des grains constituant la rugosité. On observe une plage d'écoulement stationnaire limitée par les mêmes angles de démarrage θ_{start} et d'arrêt θ_{stop} . Les observations et le modèle de [Quartier00] attribuent des origines respectivement géométrique et dynamique à ces deux angles. Ainsi, l'angle θ_{start} correspond à la limite de stabilité d'un grain piégé dans la rugosité, alors que l'angle θ_{stop} correspond au moment où la vitesse équilibrant gravité et dissipation dans les chocs devient inférieure à la vitesse de libération nécessaire pour échapper d'un piège (figure II-4). Ces deux angles dépendent essentiellement de la rugosité du socle.

Dans le cas d'une couche de grains, on observe que ces angles seuil dépendent fortement de l'épaisseur de la couche. On peut ainsi mesurer deux courbes $\theta_{\text{stop}}(H)$ et $\theta_{\text{start}}(H)$ délimitant l'arrêt et le démarrage d'un écoulement [Pouliquen99a, Daerr99a]. Partant des valeurs asymptotiques observées sur des socles meubles, ces angles augmentent lorsque l'épaisseur diminue, jusqu'à des valeurs limites associées à la rugosité du socle fixe. Ces deux courbes frontières résultent des conditions aux limites imposées par le fond rugueux. Elles peuvent ainsi s'interpréter comme un effet de dilatance [Pouliquen96b], ce qui consiste à écrire, en première approximation $\theta(H) = \mu + \beta(H)$, où μ est le coefficient de frottement intergrain et où β mesure l'effet de la géométrie de la rugosité (cf. angle de dilatance défini au § II.1) [Rowe62, Oda99].

Une explication de l'hystérésis entre ces deux angles au sein de l'écoulement a été proposée par [Jaeger90], dans le même esprit que [Quartier00]. Elle consiste à analyser la contrainte de cisaillement agissant sur un grain en fonction de sa vitesse. Celle-ci est considérée comme constituée d'un terme augmentant quadratiquement avec la vitesse (argument de [Bagnold54]), et d'un terme de piégeage, fonction décroissante de la vitesse, à valeur finie à vitesse nulle (frottement de Coulomb). Le minimum de cette courbe résultant de ces deux termes conduit naturellement à l'hystérésis (figure II-4).

III.C.2. Etudes de l'écoulement

Nous abordons maintenant l'écoulement dense lui-même, dont une revue détaillée des études expérimentales et numériques pourra être consultée dans [Azanza98]. En dehors des caractéristiques mécaniques des grains, l'écoulement est gouverné par trois paramètres : l'inclinaison, le débit (et le mode d'alimentation) et la rugosité du socle. Sur un socle lisse, l'écoulement est localisé à la paroi, et n'est ni stationnaire ni uniforme [Takahashi37, Roberts69, Ridgway70, Augenstein78, Patton87, Johnson90, Drake91, Louge01]. Par contre, sur un socle rugueux, l'écoulement est stationnaire et uniforme dans une plage d'inclinaison et d'épaisseur limitée inférieurement par la courbe $\theta_{\text{stop}}(H)$ [Azanza98, Pouliquen99a, Daerr99a] (de même l'écoulement accélère pour une inclinaison ou une épaisseur trop élevées). A la différence des écoulements confinés, le matériau est cisailé sur toute sa hauteur. Des observations contradictoires sur la forme du profil de vitesse (convexe ou concave, avec ou sans vitesse de glissement) ont été rapportées [Savage79, Ishida79, Johnson90, Ancy96 et 01]. L'étude de l'influence du mode d'alimentation (avec ou sans énergie cinétique initiale) [Johnson90] a montré que l'écoulement est dense en l'absence d'énergie cinétique initiale. Ces différentes études ont identifié un régime d'écoulement dense avec une surface libre bien définie.

Les études par simulations numériques discrètes [Walton93b, Drake95, Zheng96, Dippel99, Hanes00, Zhang00] ont été menées au moyen de conditions aux limites périodiques (sauf [Drake95]), en géométrie bidimensionnelle (sauf [Walton93b]) et par la méthode de dynamique moléculaire. Une étude très complète (systèmes de l'ordre de 10 000 sphères assez élastiques en 2D ou 3D) a été menée parallèlement à la notre [Ertas01, Silbert01,02a,b,c]. Nous y reviendrons en détail au chapitre III.

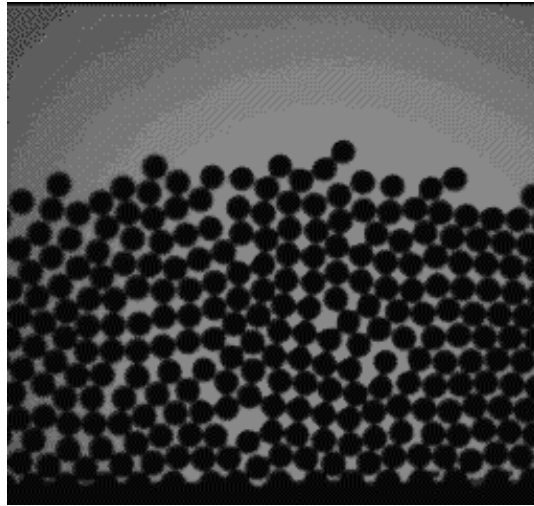


Figure II - 5 : Image de l'écoulement dense de billes d'aluminium (d'après [Azanza98]).

Nous donnons maintenant quelques détails sur l'étude menée par [Azanza98] qui, pour nous avoir précédé au LMSGC, a constitué une source d'inspiration importante pour notre propre étude. Dans l'esprit de l'étude de [Drake88, 90 et 91], Azanza a mené une étude bidimensionnelle des écoulements denses de grains secs sur plan incliné, en confrontant expérience physique et simulation numérique discrète. L'étude expérimentale a consisté à faire s'écouler des billes d'aluminium monodisperses ($d = 3 \text{ mm}$ - $e = 0,5$ - $\mu = 0,4$) sur un plan incliné dont la rugosité est constituée de billes collées, à partir d'une trémie qui permet de contrôler le débit (figure II-5). Dans le plan (θ, H) , une large plage d'écoulements stationnaires et uniformes est identifiée, pour laquelle les profils de compacité et de vitesse sont mesurés. En parallèle, des simulations numériques par la méthode de dynamique des contacts, fournissent les mêmes informations (plage d'écoulement stationnaire uniforme, profils de compacité et de vitesse). Un excellent accord entre expérience et simulations a été obtenu (figure II-6).

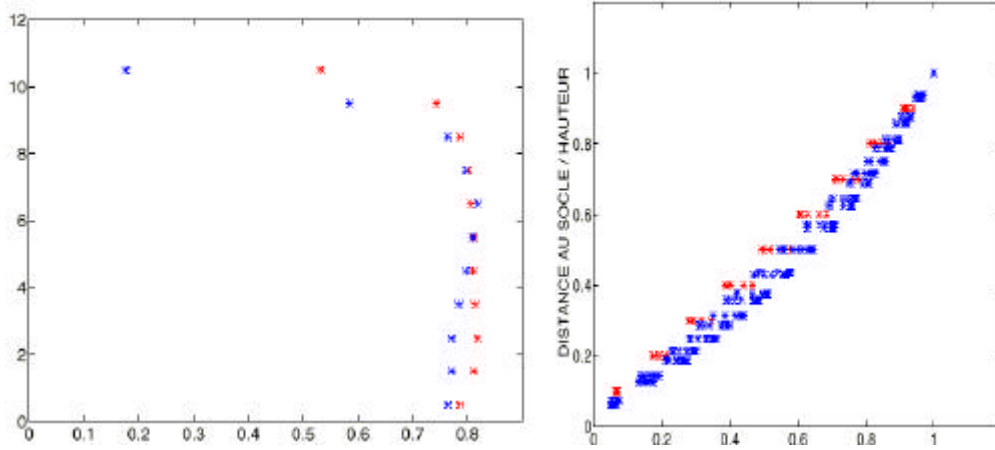


Figure II - 6 : Profils de compacité (a) et de vitesse (b).

Comparaison entre expériences (en rouge) et simulations numériques (en bleu) [Azanza98].

Différentes observations ont ainsi été obtenues (structuration du milieu près de la paroi, dilatance, influence de la rugosité...) sur lesquelles nous reviendrons au chapitre III. Nous retiendrons l'indication importante, fournie par les simulations numériques, que le profil de vitesse est peu sensible à la valeur du coefficient de restitution entre les grains, si ce dernier reste inférieur à 0,7 [Azanza98, Dippel99].

III.C.3. Loi d'échelle

Des mesures systématiques de la vitesse moyenne U , définie par :

$$U = \frac{1}{H} \int_0^H u(y) dy \quad [\text{II.2}]$$

en fonction de l'inclinaison et de l'épaisseur ont été effectuées [Vallance94, Ancey96 et 01, Azanza98, Pouliquen99a]. [Azanza98] a montré qu'à H fixée, U est une fonction linéaire croissante de θ , avec un angle seuil θ_s (16°) pour lequel la vitesse s'annule indépendamment de la hauteur (des écarts ont cependant été observés pour des inclinaisons élevées, lorsque la structuration en couches disparaît). A θ fixé, U augmente comme H^α avec $\alpha = 1,4 \pm 0,1$. Au total :

$$U \propto (\theta - \theta_s) H^{1,4} \quad [\text{II.3}]$$

Notons que des dépendance en $(\theta - \theta_s)$ et en $H^{3/2}$ ont aussi été observées par [Takahashi37, Ancey96] et [Vallance94] respectivement. Mais [Ancey96 et 01] a aussi mis en évidence un régime où U est indépendant de H . A partir d'une étude expérimentale d'écoulements de grains monodisperses en géométrie tridimensionnelle, [Pouliquen99a] a cherché une relation simple entre deux nombres adimensionnels caractérisant l'écoulement. L'un, relatif à la vitesse, est le nombre de Froude, bien connu en hydrodynamique. L'autre, relatif à l'épaisseur de l'écoulement, intègre les dépendances en inclinaison, à travers l'épaisseur d'arrêt $H_{\text{stop}}(\theta)$, corollaire de $\theta_{\text{stop}}(H)$. La loi d'échelle empirique mise en évidence par [Pouliquen99a] est :

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH}} = \beta \frac{H}{H_{\text{stop}}(\theta)} \quad \text{[II.4]}$$

ce qui correspond donc à une dépendance en $H^{3/2}$, mais à une dépendance en inclinaison plus compliquée que celle mise en évidence par Azanza. [Azanza98] a aussi mis en évidence la dépendance suivante en fonction du coefficient de frottement :

$$U \sim \begin{cases} \mu^{-0,37} & \text{si } \mu < 0,45 \\ \mu^{-1} & \text{si } \mu > 0,45 \end{cases} \quad \text{[II.5]}$$

III.D. Socle meuble

Dans ce cas, seul le débit (ou la vitesse de rotation dans le cas des tambours tournants) est imposé. L'inclinaison de la surface libre est choisie par le système lui-même. L'écoulement est stationnaire uniforme pour un débit suffisamment élevé. En-dessous d'un certain débit critique, l'écoulement est intermittent, ce qui se traduit par des avalanches. Dans ce régime oscillant, la pente oscille entre θ_{stop} et θ_{start} [Evesque88, Jaeger89, Rachjenbach00, Lemieux00]. Dans le régime d'écoulement permanent, la pente de la surface libre est constante et certaines expériences rapportent une légère augmentation de celle-ci avec le débit [Rajchenbach00, Dury98], mais qui pourrait être due à des effets de confinement [Courrech02].

L'écoulement est localisé près de la surface libre sur une couche d'une dizaine de grains d'épaisseur, avec un profil de vitesse linéaire et une queue exponentielle [Rachjenbach00, Khakhar01, Bonamy02a, Komatsu01]. Le taux de cisaillement dans la partie linéaire, d'ordre $(g/d)^{1/2}$, est indépendant du débit, ce qui signifie que lorsqu'on augmente le débit, on augmente l'épaisseur de la couche en écoulement. Il est aussi indépendant des paramètres mécaniques des grains. La compacité décroît près de la surface libre dans la région correspondant au profil linéaire de la vitesse.

III.E. Discussion

Nous allons tenter une première discussion des points communs et des différences entre ces quatre géométries. Les conditions aux limites et la distribution des contraintes étant différents, il n'est pas surprenant que certaines caractéristiques de l'écoulement changent d'une configuration à l'autre.

Un premier point commun concerne les deux géométries d'écoulement confiné. Dans les deux cas, le cisaillement est localisé près d'une paroi, bien que les distributions des contraintes ne soient pas identiques.

Les différences entre les deux écoulements à surface libre sont également intéressantes. Les distributions de contrainte sont cette fois-ci identiques, alors que les profils de vitesse ne le sont pas. Naïvement on pourrait penser que l'écoulement localisé à la surface libre d'un socle meuble est équivalent à celui rencontré sur un socle fixe rugueux, la première couche de grains immobiles sur socle meuble jouant le rôle de la rugosité du socle fixe. Cependant, les observations montrent une situation plus compliquée. En effet, les profils de vitesse et de compacité sont différents et bien spécifiques à chacune de ces deux géométries, bien que les distributions des contraintes soient semblables. Ceci prouve le rôle crucial de la condition aux limites : une frontière rigide n'est pas équivalente à une frontière érodable. On observe par ailleurs que les écoulements sur un socle meuble n'existent que pour des inclinaisons légèrement plus grandes que l'angle de repos, tandis que les écoulements sur plan incliné rugueux sont observés bien au-dessus de cet angle critique. L'observation du fluage semble indiquer l'absence de transition nette entre solide et liquide.

Une dernière constatation concerne les profils de compacité, dont les variations ne sont pas toujours corrélées avec celles de la vitesse. Dans les écoulements confinés ou sur socle meuble, les régions fortement cisailées sont aussi les plus dilatées. En revanche, pour des écoulements le long de plans inclinés, une variation du cisaillement n'induit pas une variation de la compacité.

Dans le cas des écoulements à surface libre, les dépendances de la vitesse en fonction de l'inclinaison et/ou de l'épaisseur, identifiées dans une configuration d'écoulement simple, ont permis de préciser comment le coefficient de frottement effectif du matériau granulaire en écoulement sur la rugosité ou à la surface d'un tas dépend de la vitesse et/ou de l'épaisseur. Ceci permet alors de décrire des phénomènes non stationnaire-uniforme dans des géométries plus compliquées (étalement, pente variable, fronts...), dans le cadre d'une description de type Saint-Venant (moyennée dans l'épaisseur) [Pouliquen99a, 99b et 02b, Douady99, Andreotti01b].

IV. Micromécanique

Dans cette partie, nous allons approfondir notre analyse à une échelle plus fine, celle des grains et du réseau de contact. Ces propriétés micromécaniques peuvent être mesurées grâce aux simulations numériques discrètes, et aussi par certaines techniques d'imagerie. De façon générale, on constate que dans ces écoulements denses, les différentes grandeurs (vitesse, forces..) sont très fluctuantes, et donc que la valeur moyenne risque d'être insuffisante. Nous discutons d'abord les informations relatives au mouvement des grains. Puis nous abordons le réseau de contact et les forces.

IV.A. Fluctuations et corrélations du mouvement des grains

Dans le régime collisionnel, les collisions incessantes entre grains sont responsables de larges fluctuations δv de la vitesse, et du même ordre de grandeur que la vitesse de cisaillement elle-même ($\dot{\gamma}d$). Ces fluctuations sont proportionnelles au taux de cisaillement : $\delta v \sim \dot{\gamma}d$ [Azanza98]. Dans les écoulements denses, chaque grain est engagé par ses voisins les

plus proches, et doit s'échapper de cette cage pour permettre le cisaillement du système. Ces réarrangements continuels lors d'un écoulement, sont responsables de fluctuations de la vitesse, cette fois-ci plus petites en comparaison de la vitesse de cisaillement. Dans les configurations d'écoulement confiné, les fluctuations de vitesse s'avèrent être maximum près des parois rugueuses et diminuer exponentiellement loin de ces dernières [Menon97, Veje99, Mueth00, Schöllmann99, Denniston99]. Dans ces géométries, on observe une proportionnalité des fluctuations de vitesse avec la racine carrée du taux de cisaillement: $\delta v \sim \dot{\gamma}^{1/2}$ [Losert00, Mueth01]. Toutefois, ces fluctuations ne semblent pas concerner les particules individuelles, mais ont plutôt un caractère collectif [Radjai02, daCruz02b]. En raison de l'encombrement stérique, les mouvements des grains sont fortement corrélés. Des amas ou bien des colonnes de grains peuvent exister transitoirement, mais ils sont rapidement cassés par le cisaillement [Drake90, Azanza98, Bonamy02b]. Le rôle de ces mouvements collectifs semble être très important pour comprendre la dynamique des écoulements granulaires denses. Cependant, jusqu'ici il n'existe que peu d'études des corrélations spatio-temporelles de ces mouvements collectifs [Denniston99, Mueth01, Debregeas02].

D'autres corrélations sont également induites par la présence des parois, près desquelles le milieu a tendance à se structurer en couches [Denniston99, Schöllmann99, Mueth00, Ertas01].

IV.B. Réseau de contact

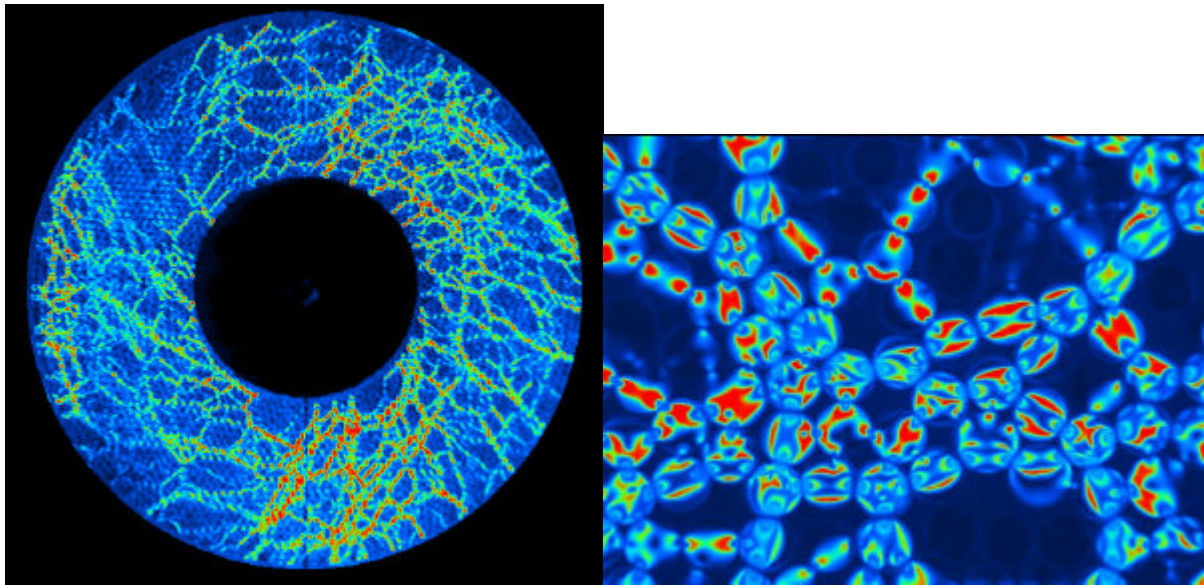


Figure II - 7 : Mise en évidence du réseau de contact par photoélasticimétrie [Howell99].

Les corrélations observées pour les mouvements fluctuants des grains dans les écoulements denses sont dues à l'existence d'un réseau de contact percolant, qui a été mis en évidence expérimentalement par photoélasticité dans des expériences de cisaillement annulaire rapide [Howell99] (voir figure II-7) et par simulations numériques discrètes [Babic90, Denniston99]. Les premières expériences permettant de visualiser ce réseau de contact ont été réalisées par Dantu, dans les années cinquante, au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées [Dantu68], sur des assemblées bidimensionnelles de cylindres. Elles avaient révélé que, dans un empilement, le moindre désordre (distribution de taille des grains en particulier) introduit une distribution très hétérogène des forces de contact. Les expériences de compression oedométrique ont été reprises de manière plus quantitative par [Travers88]. Des expériences ont aussi été réalisées en géométrie tridimensionnelle par [Allersma87]. Les faibles déformations de ce réseau de contact ont été étudiées par [Drescher72]. Enfin, cette technique a permis de mesurer la distribution spatiale des chaînes de force en réponse à une force localisée [Geng01].

Dans les écoulements denses, ce réseau de contact est constitué de particules qui restent en contact prolongé, c'est à dire qui n'interagissent pas par des collisions quasi-instantanées. La proportion relative des contacts maintenus et des collisions a été discutée

dans des expériences [Menon97] et des simulations numériques [Babic90, Denniston99]. L'analyse quantitative a montré que pour un taux de cisaillement assez élevé, le nombre de contacts maintenus est relié de façon non-triviale à la compacité, au taux de cisaillement et à la pression de confinement [Babic90, Denniston99, Schöllmann99, Lätzel00]. Par ailleurs, sous cisaillement, ce réseau de contact est fortement anisotrope avec des orientations préférentielles dans la direction du cisaillement et de la pesanteur. Des expériences récentes semblent avoir mis en évidence l'existence d'agrégats rigides transitoires, de taille largement distribuée [Bonamy02b].

Ce réseau porte les forces de contact, dont la distribution peut être analysée dans le même esprit que ce qui a été fait pour des assemblées statiques [Radjai01a et b, Staron02]. Ainsi, dans la limite quasistatique, on observe une distribution très large des forces, avec une décroissance exponentielle de la probabilité pour les forces élevées. Ceci a été mis en évidence expérimentalement par [Liu95, Mueth98]. On peut décomposer ce réseau en deux réseaux fort et faible, correspondant aux forces respectivement plus grandes et plus petites que la force moyenne. En échelle logarithmique, les forces fortes sont distribuées sur la moitié d'une décade, tandis que les forces faibles s'étalent sur plusieurs décades. Les contacts faibles représentent environ 60% des contacts. L'orientation des contacts faibles est à peu près isotrope, contrairement à celle des contacts forts. Il apparaît que les contacts forts permettent au matériau de supporter les contraintes de cisaillement, alors que le reste des grains se comporte comme un fluide interstitiel. La prise en compte de ces chaînes de force dans le comportement mécanique d'un empilement granulaire a été proposée par [Edwards89].

Ce réseau de contact est extrêmement sensible au cisaillement, et ses fluctuations spatio-temporelles ont été mesurées expérimentalement au niveau des parois de confinement [Miller96, Ngadi98, Veje99, Schwarz98, Aharonov99, daCruz02b]. Au repos, les voûtes, en reportant les forces vers les parois, sont responsables de la saturation de la pression au sein d'une colonne de grains [Roberts1884, Janssen1895]. La dynamique de ces voûtes [Duran98] (formation et rupture des chaînes de force) est très importante pour comprendre comment l'orifice de sortie régule le débit dans les silos (voir le modèle de la voûte libre [Brown70]). Il existe également un couplage entre le réseau de contact et les petites variations de la compacité induite par le cisaillement. On peut observer des transitions structurelles (analogue à la transition vitreuse) [Schwarz98, Veje99, Aharonov99], qui pourraient être responsables de brusques changements des composantes du tenseur des contraintes [Lun94]. Par exemple,

une densification du réseau de contact ainsi qu'une augmentation conjointe du nombre moyen de coordination conduit à des situations de blocage [Babic90, Aharonov99, O'Hern01, daCruz02b].

Un enjeu important est de comprendre comment ce réseau de contact évolue avec le cisaillement. Une première quantité intéressante est la proportion de contact où le frottement est entièrement mobilisé, c'est à dire où les grains glissent les uns par rapport aux autres. La mobilisation du frottement (et son anisotropie) a été étudiée dans les déformations quasistatiques [Radjai96], lors de l'initiation d'écoulement [Staron02], et sous cisaillement simple [daCruz02b]. La proportion de contacts roulants, où le frottement n'est pas entièrement mobilisé et qui ne contribuent pas à la dissipation d'énergie, augmente avec le coefficient de frottement et l'intensité de la force normale. Cette question est reliée à l'organisation de la rotation des grains [Wolf98, Schöllmann99, Radjai01a et b, Duran98].

Une dernière remarque importante concerne les transferts de quantité de mouvement et la dissipation d'énergie au sein de ces écoulements denses, où existe un réseau de contacts. Ainsi, les transferts de percussion sont non-locaux : un choc entre deux particules "diffuse" dans l'ensemble du réseau de contact vers les parois, de sorte que la collision peut devenir complètement inélastique. Dit autrement, la dissipation augmente avec le nombre de contact [Bernu90] (ainsi, si une bille isolée rebondit, un sac de ces mêmes billes lui ne rebondit pas). Ceci pourrait être la raison pour laquelle le profil de vitesse ne dépend pas du coefficient de restitution dans les écoulements denses [Rajchenbach00, Azanza98]. Un mode de transfert cohérent de la quantité de mouvement associé à des réarrangements collectifs très lents des grains a également été discuté par [Denniston99].

IV.C. Discussion

Ainsi de nombreuses informations fines sont désormais disponibles à l'échelle des grains. Toutefois le lien entre la dynamique des grains pris individuellement et celle moyennée à l'échelle de l'écoulement macroscopique (profil de vitesse, de compacité) n'est pas encore claire. Une des idées importantes qui émerge de cette analyse micromécanique est l'existence de mouvements collectifs et de corrélations entre le mouvement des particules et

les forces qui en sont à l'origine. Cependant, le rôle et la dynamique de ces corrélations restent encore très flous.

V. Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous disposons d'informations tant à l'échelle macroscopique (seuil d'écoulement, localisation du cisaillement, dilatance) que microscopique (fluctuations, corrélations, texture du réseau de contacts, mouvements collectifs). Ces observations vont motiver les modèles rhéologiques et les analyses micromécaniques qui seront présentés au chapitre V.

Cependant, avant d'aborder cette étude théorique, nous allons commencer dans les deux chapitres suivants par apporter notre contribution à ces observations sur les écoulements denses. Nous nous sommes restreints à deux géométries d'écoulement gravitaire, le plan incliné et la conduite verticale, et nous avons utilisé deux outils d'investigation, la simulation numérique discrète (en deux dimensions), et l'imagerie à la paroi, ou par IRM (cette fois ci en trois dimensions). Nous mesurerons ainsi en fonction des paramètres (rugosité, polydispersité, inclinaison...) des grandeurs moyennes relatives à la structure (profil de compacité), à la cinématique (profils de vitesse de translation et de rotation) et au réseau de contact.

CHAPITRE III

ÉCOULEMENTS SUR PLAN INCLINÉ

CHAPITRE III

ÉCOULEMENTS SUR PLAN INCLINÉ

Ce chapitre est consacré aux écoulements denses de grains secs sur un plan incliné rugueux. L'essentiel du chapitre décrit une étude par simulation numérique discrète, en géométrie bidimensionnelle, par la méthode de dynamique des contacts, décrite en Annexe 4. Après avoir décrit le système simulé, on présente les résultats relatifs à la structure, la cinématique et le réseau de contact, en les comparant aux résultats de la littérature. La discussion de ces résultats fera l'objet du chapitre V. En fin de chapitre, on évoque aussi une étude préliminaire, à la fois expérimentale et numérique, d'écoulements de grains polygonaux.

I. Système simulé

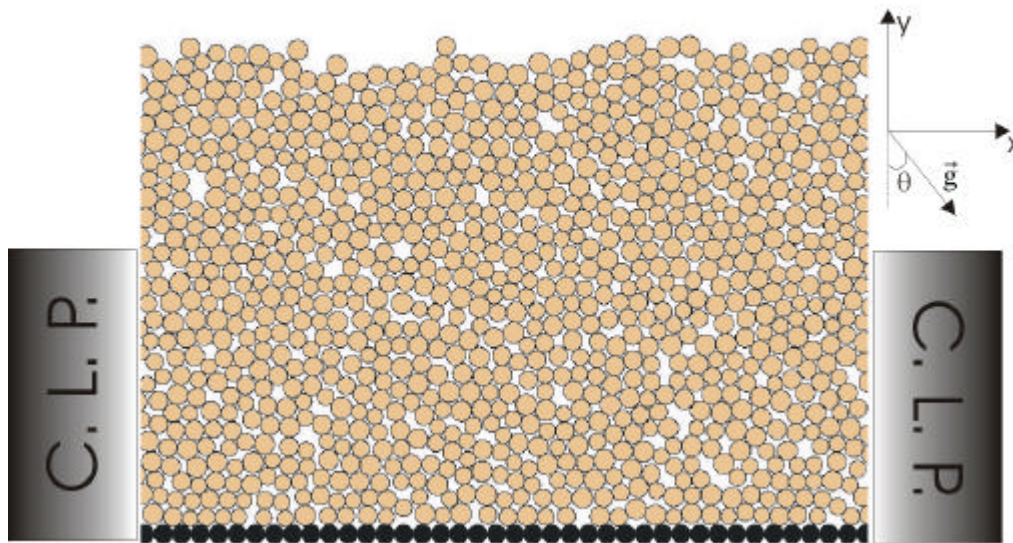


Figure III -1: Système simulé ($N = 1000$).

Les systèmes simulés sont constitués d'une assemblée de disques de masse volumique ρ_p , de diamètre moyen d , de masse $m = \rho_p \pi d^2 / 4$ et de moment d'inertie $I = md^2 / 8$, qui s'écoulent sous l'effet de la gravité g sur un plan incliné d'un angle θ avec l'horizontale, recouvert de billes jointives de diamètre d (l'indice s fait référence au socle).

Les écoulements sont parfaitement bidimensionnels, c'est-à-dire que les centres de gravité de tous les disques appartiennent à un même plan. On note x la direction de

l'écoulement et y la direction orthogonale (hauteur). En général, le zéro est pris au centre des grains du socle.

Afin de limiter le temps de calcul, des conditions aux limites périodiques (CLP) sont appliquées selon la direction x de l'écoulement. Les écoulements, constitués de N disques, sont donc simulés à l'intérieur d'une fenêtre de longueur $L = N_s d$, et chaque particule qui sort de la fenêtre d'étude est réinjectée du côté opposé à la même hauteur et avec les mêmes caractéristiques cinématiques. Pour $N < 1000$, $N_s = 40$, et pour $N = 5000$, $N_s = 120$. Le choix de conditions aux limites périodiques n'est pas anodin. Dans l'expérience, on impose le débit, alors que dans la simulation numérique on impose le nombre N de particules dans une fenêtre de taille L , ce qui revient approximativement à imposer l'épaisseur H de la couche granulaire dense qui s'écoule, puisque l'on verra que la compacité est à peu près constante. La combinaison de la géométrie bidimensionnelle et des conditions aux limites périodiques permet d'éviter les problèmes de paroi latérales.

En utilisant les échelles naturelles de longueur, de temps et de masse du système simulé, les résultats sont dans la suite systématiquement présentés en grandeurs adimensionnées. Ainsi une distance y , un temps t , une vitesse v , ou une contrainte σ sont adimensionnées de la façon suivante (et l'on omettra l'astérisque dans la suite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} y^* = \frac{y}{d} \\ t^* = \frac{t}{\sqrt{d/g}} \\ v^* = \frac{v}{\sqrt{gd}} \\ \sigma^* = \frac{\sigma}{\rho_p gd} \end{array} \right. \quad \text{[III.1]}$$

Dans ces unités, le pas de temps de calcul choisi dans les simulations vaut 5.10^{-3} .

Par rapport à l'étude de [Azanza98], limitée à $H < 20$, nous avons cherché à étendre la gamme des épaisseurs, en allant jusqu'à une épaisseur de l'ordre de 40 grains. Par ailleurs, l'étude d'Azanza (aussi bien expérimentale que numérique) était restreinte à des écoulements

de sphères monodisperses. Le milieu avait alors tendance à former des arrangements cristallins, cependant partiellement détruits par le cisaillement. On observait donc des mouvements cohérents de blocs, de colonnes de grains, des dislocations... Afin de s'affranchir de ces effets, nous avons choisi d'introduire une certaine polydispersité p , en considérant des assemblées de disques de diamètre uniformément distribué entre $(1-p)$ et $(1+p)$. Un tel milieu est réputé pouvoir ségréger sous cisaillement. On a donc contrôlé l'homogénéité en mesurant l'évolution du profil de distribution des tailles dans la couche en écoulement. Ce dernier s'est avéré stationnaire tant que la polydispersité est inférieure à 20 %. C'est donc dans cette gamme que nous avons travaillé.

En plus de l'angle d'inclinaison du plan et du nombre de disques, les autres paramètres des simulations sont les caractéristiques mécaniques des disques, à savoir les coefficients de restitution normal e_N , tangentiel e_T et de frottement μ . Afin de limiter le nombre de paramètres, les valeurs de ces coefficients pour les grains du socle ont été prises égales à celles des grains en écoulement. La valeur du coefficient de frottement généralement utilisée est $\mu = 0,4$ (ce qui correspond à la valeur estimée pour l'aluminium, matériau ayant donné lieu aux écoulements denses lors de l'étude d'Azanza). Enfin nous choisissons de décrire le cas d'un matériau très dissipatif, **en prenant des coefficients de restitution égaux à zéro**. Dans ce choix, nous avons à l'esprit le résultat établi par [Azanza98, Dippel99] (cf. Chapitre II § III.C), à savoir l'invariance de l'écoulement en fonction des coefficients de restitution lorsque ceux-ci sont assez petits.

Les disques sont initialement disposés sans contact de manière aléatoire au-dessus du plan avec des vitesses de translation et rotation nulles. Ils tombent alors en chute libre sous l'effet de la gravité avant de rencontrer le fond rugueux, et commencent à interagir entre eux. L'énergie cinétique moyenne commence donc par augmenter, puis décroît brusquement lors des premiers chocs inélastiques. L'évolution ultérieure de l'énergie cinétique permet de distinguer trois situations (figure III-2) : l'écoulement s'arrête, accélère, ou bien devient stationnaire. De façon arbitraire, l'écoulement est considéré comme stationnaire si les fluctuations de l'énergie cinétique totale (translation plus rotation), n'excèdent pas 10 % de sa valeur moyenne. Lorsqu'un état stationnaire est atteint, la simulation numérique se poursuit sur une durée de quelques dizaines d'unités de temps, soit quelques 10^4 pas de temps. Ceci, nous le verrons plus loin, correspond à un déplacement relatif de deux couches adjacentes de

quelques dizaines de grains. Sur la figure III-2, les énergies cinétiques sont adimensionnées selon :

$$E_c^* = \frac{E_c}{\frac{2}{\pi} mgL \cos \theta} \quad [\text{III.2}]$$

$mgL \cos \theta$ étant l'énergie potentielle perdue par un grain de masse m pendant la traversée de la fenêtre de taille L . La procédure d'initiation de l'écoulement assure qu'il n'y a pas d'effet de l'histoire sur les caractéristiques de l'écoulement.

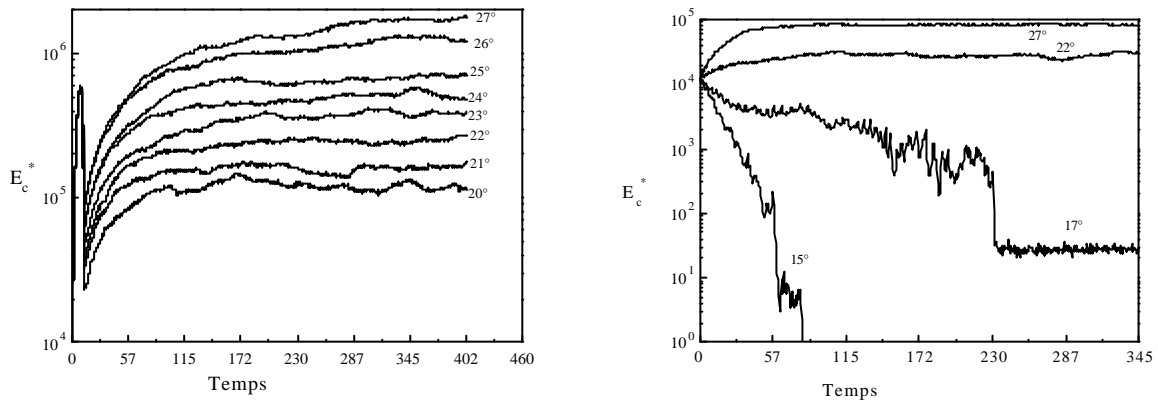


Figure III - 2 : Evolution de l'énergie cinétique totale du système pour différentes inclinaisons ($p = 0,15 - N = 500$) à gauche ($p = 0 - N = 500$) à droite.

Dans l'état stationnaire, on considère que les grandeurs d'intérêt (positions, vitesses, forces) ont un comportement moyen indépendant du temps et de la direction de l'écoulement. On fera la même hypothèse sur leurs fluctuations. En revanche, elles peuvent dépendre fortement de la hauteur au sein de la couche en écoulement. On doit donc procéder à une double moyenne, dans l'espace et dans le temps, décrite en Annexe 5. La moyenne spatiale, selon x , est réalisée en introduisant une fonction de pondération. La moyenne temporelle est obtenue en considérant 100 instants successifs, séparés entre eux de 100 pas de temps.

Dans la suite, nous comparerons nos résultats avec ceux d'une équipe américaine qui a mené une étude très similaire à la nôtre, et dont les résultats viennent très récemment d'être publiés [Ertas01, Silbert01,02a,b,c]. Dans l'étude américaine, il s'agit d'écoulements de grandes assemblées de sphères monodisperses en deux ou trois dimensions sur un socle rugueux (N d'ordre 10 000). La méthode de simulation numérique utilisée est la dynamique

moléculaire. Les grains sont plus élastiques ($e_N = 0,9$ mais $\mu = 0,5$), et la rugosité est constituée de sphères collées plus grosses que les sphères en écoulement (facteur 2 en 2D et 1,2 en 3D).

II. Diagramme d'écoulement

L'évolution de l'écoulement (arrêt, accélération, régime stationnaire) dépend de l'inclinaison θ et du nombre de particules N , ou encore de l'épaisseur H de la couche en écoulement. Ceci est résumé dans un diagramme hauteur-inclinaison (figure III-3). Le régime stationnaire domine dans une large plage d'inclinaison et de hauteur limitée par deux courbes $H_{\text{stop}}(\theta)$ (déterminée avec précision, et sur laquelle on reviendra) et $H_{\text{acc}}(\theta)$ (indiquée ici de manière approximative). On retrouve ici la courbe $H_{\text{stop}}(\theta)$ décrite au Chapitre II § III.C.

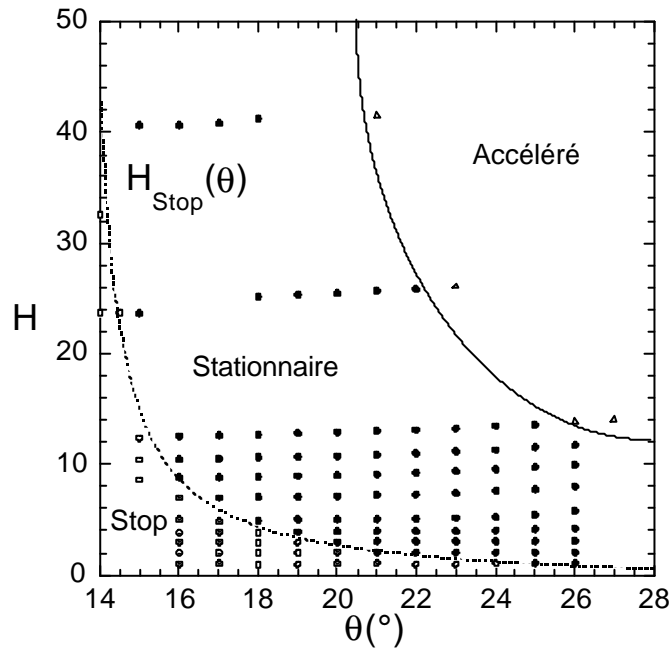


Figure III - 3 : Régimes d'écoulement en fonction de l'inclinaison et de l'épaisseur ($p = 0,15$). La courbe en trait discontinu est l'approximation de $H_{\text{stop}}(\theta)$ proposée dans le texte. Chaque point de cette figure correspond à une simulation.

Cette courbe met en évidence deux angles caractéristiques : celui pour lequel H diverge, c'est à dire l'angle en-dessous duquel l'écoulement est toujours impossible, appelé ϕ dans la suite, et l'angle pour lequel H s'annule, c'est-à-dire l'angle maximum de piégeage d'un

grain dans la rugosité, appelé θ_m dans la suite. On s'aperçoit que la courbe $H_{\text{stop}}(\theta)$ est ajustée de manière satisfaisante par l'expression suivante :

$$H_{\text{stop}}(\theta) = B \frac{\theta_m - \theta}{\theta - \phi} \quad [\text{III.3}]$$

où B définit une échelle de longueur caractéristique de piégeage par la rugosité. On mesure ainsi $B = 1,2$, $\phi = 13,5^\circ$ et $\theta_m = 35^\circ$.

[Azanza98] avait mis en évidence un angle seuil θ_s (voir Chap II § III.C.1), et son augmentation avec le coefficient de frottement (environ 2° lorsque μ varie de 0,1 à 0,7), effet aussi observé par [Dippel98].

Dans l'étude américaine, le même type de diagramme est observé avec $\phi^{2D} \approx 18^\circ$ et $\phi^{3D} \approx 20^\circ$. Pour $\theta > \theta_m$, le développement d'une couche limite au niveau de la rugosité du fond provoque l'apparition d'un régime accéléré instable. Une très grande sensibilité aux paramètres micromécaniques a été mise en évidence. Ainsi, en 2D, lorsque le coefficient de restitution normale varie de 0,9 à 0,8, l'angle maximum θ_m augmente de 23° à 26° . De même une réduction du coefficient de frottement réduit la plage d'écoulement stationnaire. Un comportement hystérétique près de l'angle d'arrêt a aussi été observé dans les simulations 3D pour les faibles épaisseurs, qui pourrait s'expliquer par la cristallisation du système monodisperse. Une étude détaillée de l'influence de la rugosité indique en particulier une localisation du cisaillement près du socle lorsque la rugosité devient plus régulière.

III. Structure

III.A. Dilatance

Le premier indicateur structurel est la compacité moyenne dans la couche granulaire en écoulement, notée $\langle v \rangle$. Cette grandeur a un sens car on constate que le milieu est raisonnablement homogène, et a une surface libre assez bien marquée. De façon plus précise, on commence par calculer le profil de compacité linéique $v(y)$ (figure III-4).

On définit arbitrairement l'épaisseur H comme l'altitude à laquelle $\dot{\gamma} = 0,3$. La compacité moyenne est définie par :

$$\langle v \rangle = \frac{1}{H} \int_0^H v(z) dz \quad [\text{III.4}]$$

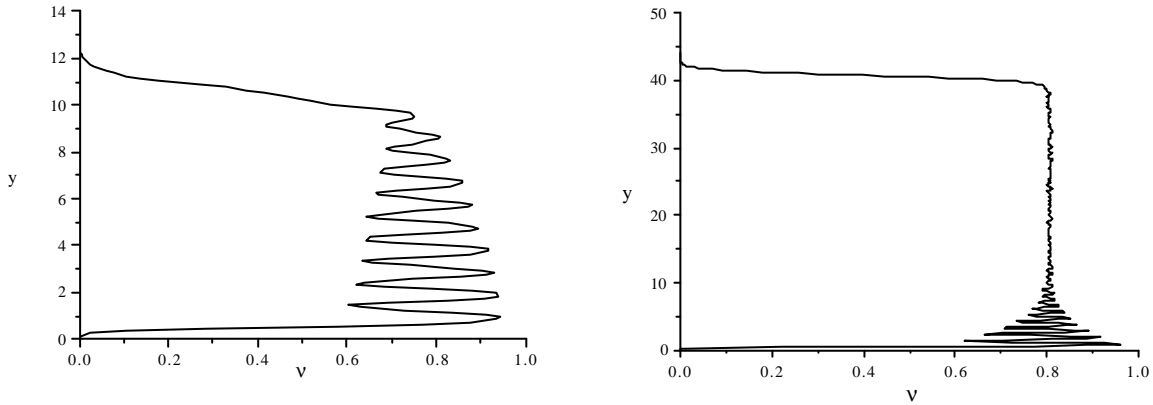


Figure III - 4 : Profil de compacité

$a : N = 500, q = 20^\circ, p = 0,15$ - $b : N = 5000, q = 18^\circ, p = 0,15$.

On constate que cette compacité moyenne est de l'ordre de 0,7 à 0,8, c'est-à-dire très proche de celle de l'empilement désordonné compact de disques monodisperses ($v_m = 0,82$). Elle décroît de façon significative (15 %) avec l'inclinaison, avec une dépendance faible en épaisseur (figure III-5). Cet effet avait déjà été mis en évidence par [Azanza98].

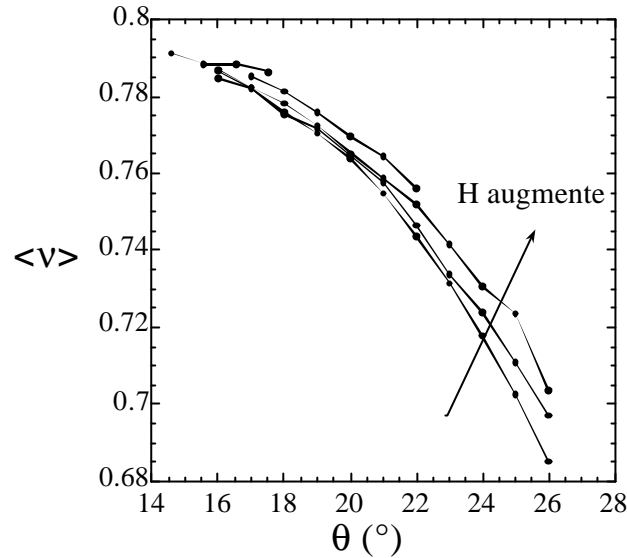


Figure III - 5 : Influence de l'inclinaison et de l'épaisseur sur la compacité moyenne ($p = 0,15$).

L'équipe américaine observe aussi un profil de compacité moyen indépendant de la hauteur, et une décroissance de la compacité moyenne avec l'inclinaison, plutôt linéaire en 3D et un peu plus rapide en 2D. Elle observe aussi une certaine dilatation dans les premières couches près du socle.

III.B. Structuration en couches

D'un point de vue qualitatif, la figure III-4 montre une forte structuration près du socle, les grains se disposant en couches parallèles au fond (effet bien connu dans les liquides [Henderson84]), effet déjà mis en évidence par [Azanza98]. On observe que cet effet diminue lorsque l'inclinaison augmente (figures III-6). Cette structuration en couches s'estompe progressivement vers la surface libre et est fortement réduite par la polydispersité. La distance entre les pics successifs du profil de compacité renseigne sur la séparation moyenne entre deux couches successives.

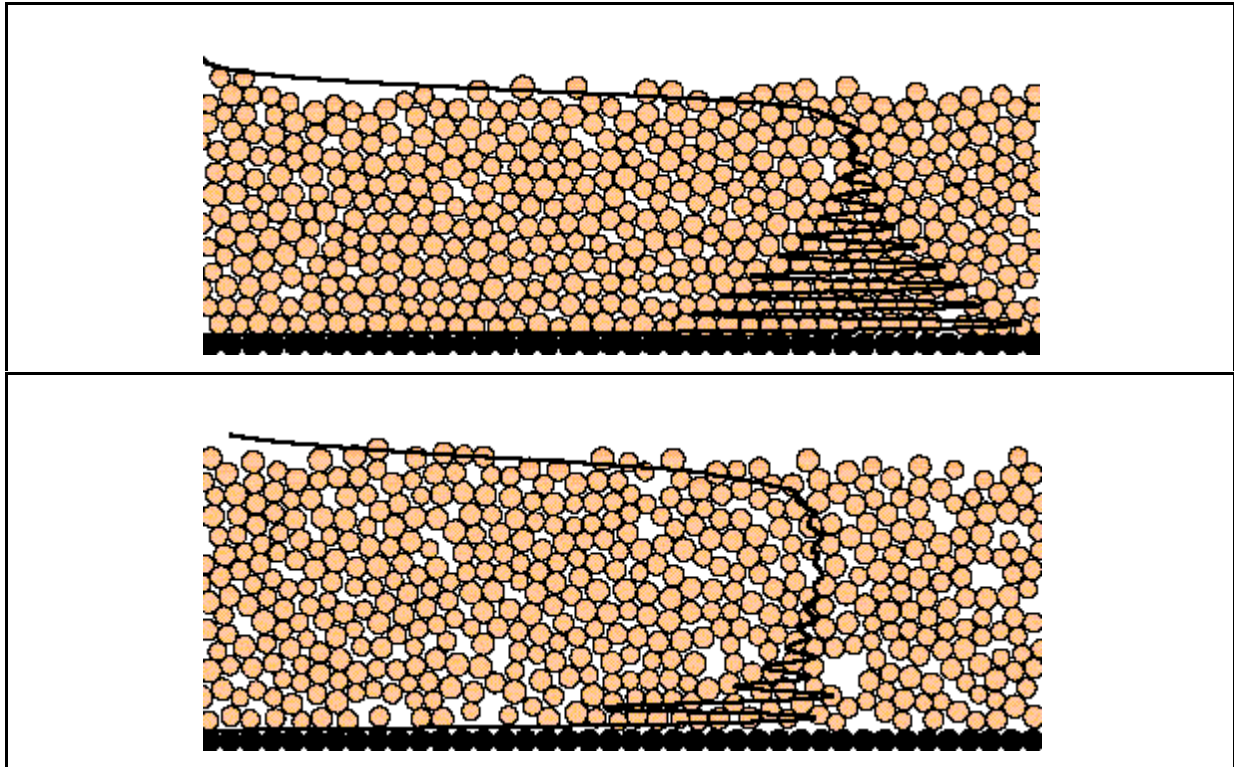


Figure III - 6 : Profil de compacité

$a : q = 20^\circ - N = 500 - p = 0,15$ - $b : q = 27^\circ - N = 500 - p = 0,15$.

Des mesures du profil de compacité par gamma-densitométrie ont été réalisées pour des écoulements en canal 3D. Les résultats, présentés en Annexe 1, indiquent un profil de compacité à peu près constant sur l'épaisseur avec une décroissance près de la surface libre.

III.C. Trajectoires

Dans son étude d'écoulements monodisperses, Azanza avait mis en évidence des trajectoires des grains quasi-parallèles au socle, avec des oscillations marquées pour les grains proches de la rugosité, s'estompant progressivement vers la surface libre. Azanza a constaté que les billes de la première couche sont en fait piégées pendant un certain temps dans les interstices de la rugosité, puis soudainement délogées sous l'effet d'une collision, de sorte que la géométrie précise de cette rugosité (taille des pièges et donc temps de résidence) a une influence très notable sur le profil de vitesse. La situation semble moins simple dans les écoulements polydisperses. Dans la première couche, on retrouve un mouvement qui épouse le contour de la rugosité (figure III-7). Dans les couches supérieures, un tel mouvement oscillant est plus difficile à percevoir car la notion même de couche s'atténue

progressivement. La figure III-8 montre l'évolution typique de l'altitude des particules en fonction de leur distance par rapport au socle. A proximité du socle, le milieu reste assez structuré en couches, mais l'on observe cependant des sauts brusques entre couches. Plus haut, le milieu n'est plus structuré en couches, et l'on observe que les grains ont un mouvement diffusif au sein de l'écoulement. Cette diffusion transverse, d'intérêt par exemple pour les problèmes de ségrégation, a été aussi observée par [Dippel98, Silbert01], et des mesures du coefficient de diffusion transverse ont été menées. Il serait intéressant d'étudier la corrélation des mouvements de grains voisins, afin de mettre en évidence d'éventuels mouvements d'amas, évoqués au Chapitre II § IV.A.

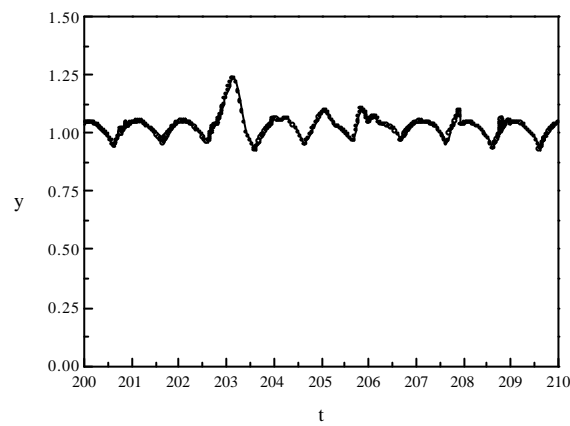


Figure III - 7: Trajectoire d'un grain de la première couche au-dessus du socle

($q = 23^\circ$ - $N = 1000$ - $p = 0.15$).

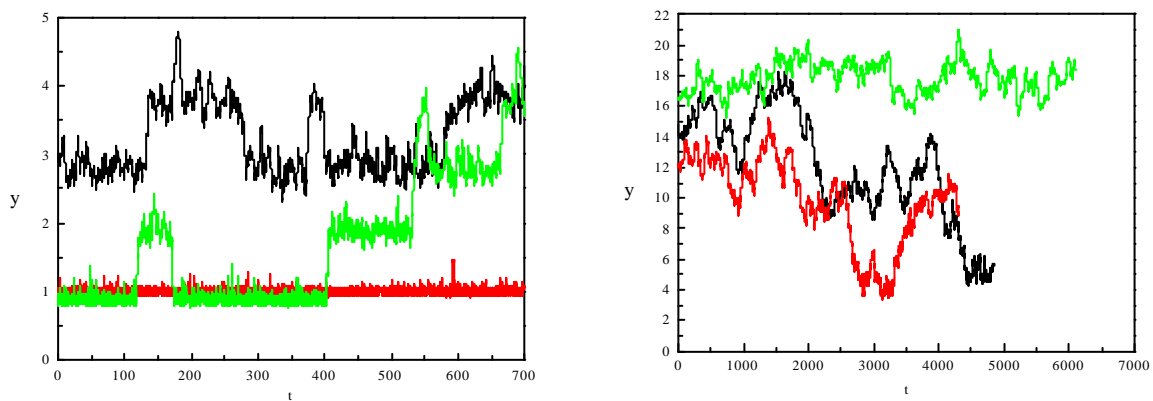


Figure III -8: Trajectoires de grains proches (à gauche) ou distants du socle (à droite).

($q = 23^\circ$ - $N = 1000$ - $p = 0.15$).

IV. Cinématique

IV.A. Vitesse de translation

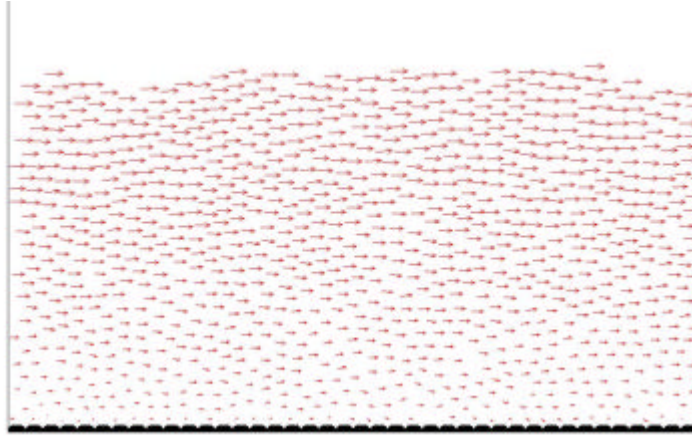


Figure III - 9 : Champ de vitesse instantané ($N = 1000$ - $q = 20^\circ$ - $p = 0,15$).

IV.A.1. Vitesse moyenne

La figure III-9 montre un champ de vitesse instantané. Les écoulements sont cisailés sur toute leur hauteur, et non seulement en surface comme sur socle meuble. La figure III-10 montre des profils de la vitesse moyenne longitudinale u (le long de l'écoulement), pour des écoulements plus ou moins épais. Les ondulations près du socle sont liées à l'organisation en couches. La vitesse est une fonction monotone croissante de la hauteur, plutôt linéaire lorsque la hauteur H est faible ($H \leq 10$) et pour des inclinaisons faibles (sauf peut-être près du socle) et manifestant une concavité plus marquée pour des inclinaisons plus élevées. Pour des hauteurs d'écoulement ($H > 10$) cette concavité se manifeste surtout au niveau du socle. La vitesse moyenne transversale est très faible, de l'ordre de 1% de la composante longitudinale.

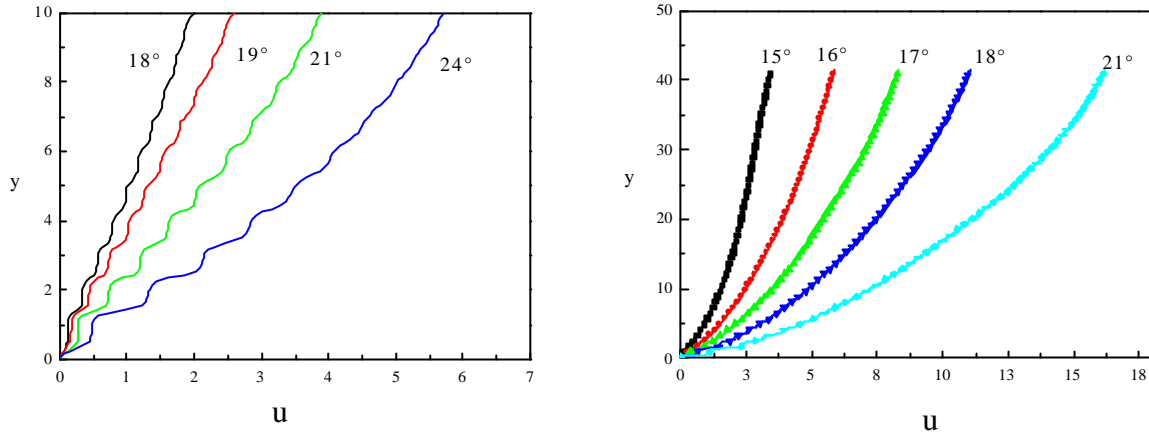


Figure III - 10 : Profils de vitesse de translation
(à gauche : $N = 500 - p = 0,15$ et à droite : $N = 5000 - p = 0,15$).

Nous avons observé, sans pour autant en avoir une explication à ce stade, que ces profils de vitesse étaient systématiquement bien représentés par une fonction du type (ce qui évoque une couche limite turbulente) :

$$u(y) = a \cdot \log(1 + y/b) \quad \text{[III.5]}$$

où a et b sont deux paramètres d'ajustement qui dépendent de l'inclinaison et de l'épaisseur (figure III-11a). Nous avons par ailleurs testé la prédiction du modèle de Bagnold (cf. chapitre I §V.B), c'est à dire une contrainte de cisaillement proportionnelle au carré du taux de cisaillement, de sorte que le profil de vitesse est une fonction linéaire de $(H-y)^{3/2}$. La figure III-11b montre un accord remarquable avec cette prédiction*, tant que l'on reste à distance du socle, ce qui est conforme aux résultats de l'équipe américaine. Ceci suggère l'approximation suivante pour le taux de cisaillement (avec y_s de l'ordre de 10):

$$\dot{\gamma}(y) = \frac{du}{dy} = \frac{a}{b+y} \quad \text{pour } y \leq y_s \quad \text{[III.6]}$$

$$\dot{\gamma}(y) \sim \sqrt{H-y} \quad \text{pour } y \geq y_s \quad \text{[III.7]}$$

* Nous remercions Patrick Richard de l'Université de Rennes pour avoir mis en évidence de point.

Le taux de cisaillement est maximum au voisinage du socle, décroît fortement dans les premières couches (zone structurée), puis plus doucement vers la surface libre (figure III-12a). b apparaît comme une longueur d'influence du socle rugueux. Nous reviendrons un peu plus loin sur l'analyse des paramètres a et b . Les écoulements peu épais (H d'ordre b) sont ainsi les plus linéaires. Cependant, la figure III-12b (qui compare les données brutes avec les deux formules précédentes) montre une déviation du régime de Bagnold dans les dix couches superficielles (contrairement à ce que suggère l'analyse du profil de vitesse !). Au total, il faut distinguer trois zones, une zone d'influence du socle, une zone « de Bagnold », et une zone superficielle.

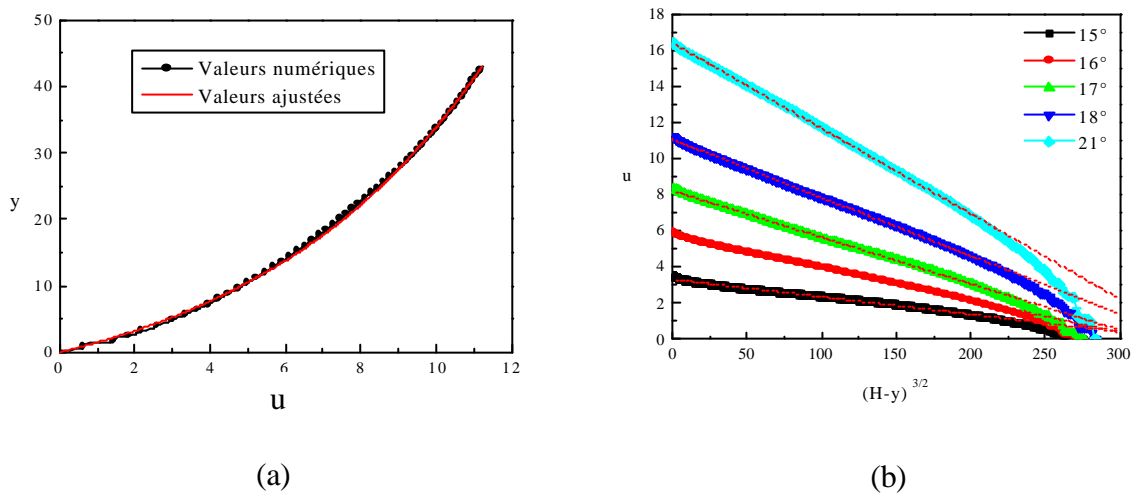


Figure III - 11 : Forme du profil de vitesse.
A gauche, courbe d'ajustement (III.5) pour ($N = 5000 - q = 18^\circ - p = 0,15$).
A droite, analyse de Bagnold pour ($N = 5000 - p = 0,15$).

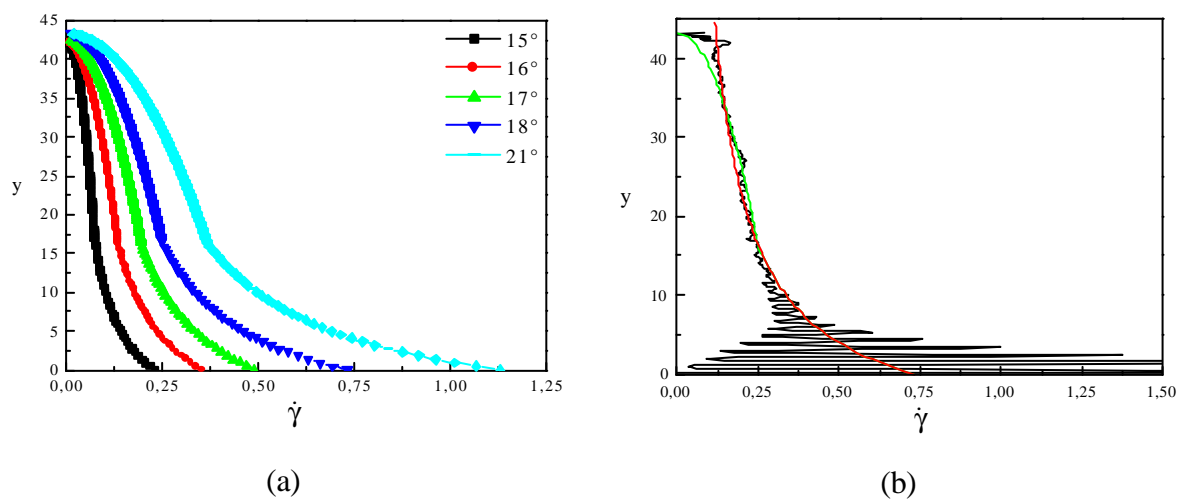


Figure III-12 : a-Profil de taux de cisaillement ajusté selon (III-6 et III-7) pour différentes inclinaisons ($N = 5000 - p = 0.15$).
b - Profil de taux cisaillement brut comparé aux ajustements (III-6 (en rouge) et III-7 (en vert)) ($N = 5000 - q = 18^\circ - p = 0.15$).

La polydispersité p (dans une plage 0 à 20 %) a une influence notable sur le profil de vitesse (figure III-13). L'augmentation de p conduit à une diminution de la vitesse moyenne de plusieurs dizaines de pourcents et augmente la concavité du profil.

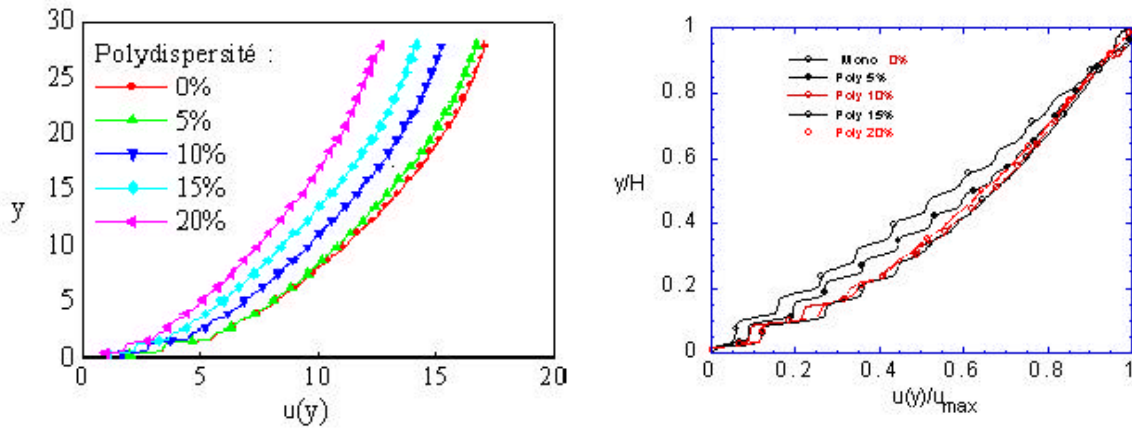


Figure III - 13 : Effet de la polydispersité sur le profil de vitesse

A gauche ($N = 1000 - q = 22^\circ$). A droite ($N = 500 - q = 22^\circ$).

IV.A.2. Loi d'échelle

On a montré au chapitre II que plusieurs études avaient permis d'identifier une relation entre la vitesse moyenne U (définie par l'équation II.2) et les paramètres de contrôle de l'écoulement, c'est à dire la hauteur moyenne H de l'écoulement et l'inclinaison θ du plan. Plusieurs lois d'échelle ont été proposées, en particulier par [Azanza98] et [Pouliquen99a]. Nous avons pour notre part étudié le cas d'un matériau polydisperse ($p = 0,15$), dans une large gamme d'épaisseur large ($2 < H < 42$), et pour une inclinaison variant de 17° à 27° . Les dépendances sont alors moins évidentes à établir (pour plus de détail voir [Albertelli99]).

Une première démarche consiste à chercher séparément les dépendances en inclinaison et en épaisseur. On trouve alors :

$$U = \beta H^\alpha \frac{\theta - \theta_1}{\theta_2 - \theta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_1 = 10,5^\circ \pm 1,0^\circ \\ \theta_2 = 32,0^\circ \pm 1,5^\circ \\ \alpha = 1,25 \pm 0,05 \\ \beta = 0,17 \pm 0,04 \end{cases} \quad \text{[III.8]}$$

Le test de ces dépendances est représenté sur la figure III-14.

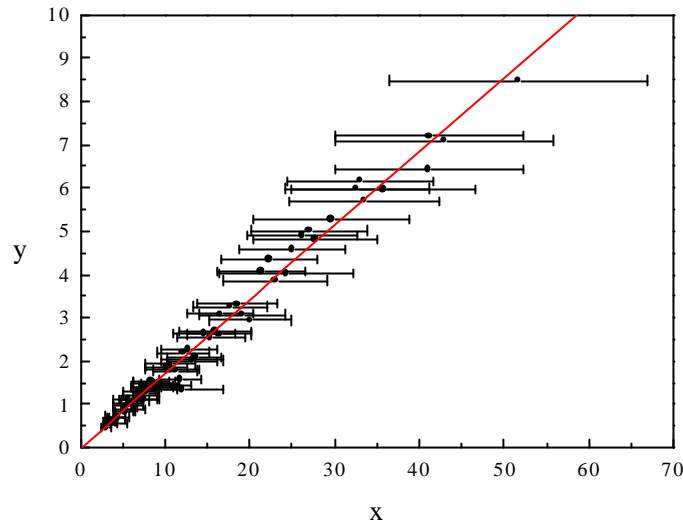


Figure III - 14 : Test de la relation (III-8). $y = U$ et $x = H^a \frac{q - q_1}{q_2 - q}$

Cette loi d'échelle évoque celle mise en évidence par Pouliquen, mais l'exposant de H est différent et la dépendance en inclinaison est différente de celle identifiée via $H_{\text{stop}}(\theta)$. Nous avons cherché à identifier une dépendance en $H_{\text{stop}}(\theta)$, en traçant le nombre de Froude en fonction du rapport $H/H_{\text{stop}}(\theta)$. On obtient alors la figure III-15, qui fait apparaître un comportement du même type que celui mis en évidence par Pouliquen, avec cependant des nuances (voir la figure III-16 pour une comparaison entre nos résultats et ceux de Pouliquen) :

$$\text{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gH}} = \alpha + \beta \frac{H}{H_{\text{stop}}(\theta)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = 0,1 \\ \beta = 0,05 \end{cases} \quad [\text{III.9}]$$

Il apparaît une constante α au second membre. Elle peut être considérée comme l'indicateur d'une vitesse de glissement au socle.

Le préfacteur β est bien plus petit que celui mesuré par Pouliquen (0,136). Cependant, il y a tout lieu de penser que ce coefficient doit dépendre du couple matériau-rugosité et de la dimension du problème: la rugosité est ici très régulière et la dimension est deux.

On note un écart à cette courbe (annulation plus rapide du nombre de Froude) lorsque H tend vers $H_{\text{stop}}(\theta)$, ce qui est logique par définition même de l'épaisseur d'arrêt (voir l'étude expérimentale de [Rognon02]).

Les points s'écartent de la courbe maîtresse pour les épaisseurs élevées ($H = 40$).

L'équipe américaine [Silbert02c] met elle-aussi en évidence cette loi d'échelle avec un préfacteur β qui semble être la moitié de celui mesuré par Pouliquen. Au total, il apparaît que cette loi d'échelle est assez robuste, mais il serait intéressant de la tester plus complètement en fonction de la rugosité, de la polydispersité ou encore de l'épaisseur.

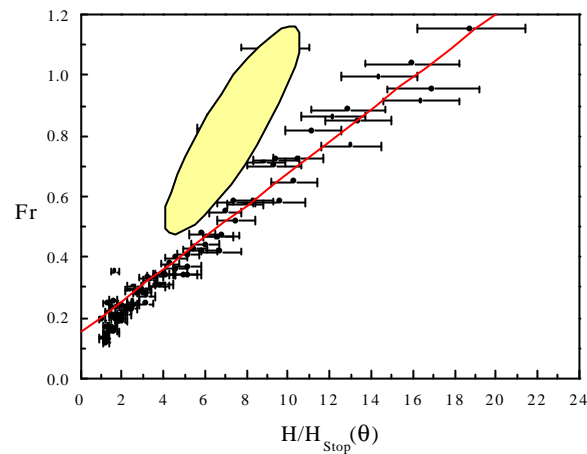


Figure III - 15 : Loi d'échelle faisant intervenir $H_{stop}(\theta)$. La zone jaune correspond aux points $H = 40$.

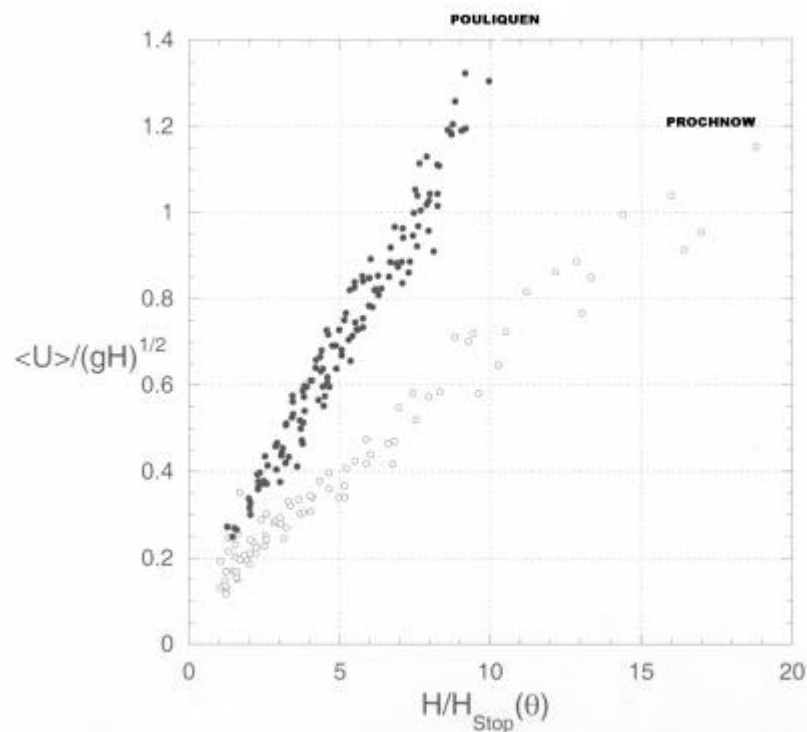


Figure III-16 : Comparaison avec les résultats de Pouliquen.

Nous proposons maintenant de discuter cette loi d'échelle à partir de la loi d'ajustement mise en évidence pour le profil de vitesse. Celle-ci conduit en effet à une expression simple de la vitesse moyenne en fonction des paramètres a et b :

$$U = \frac{ab}{H} \left(1 + \frac{H}{b} \right) \log \left(1 + \frac{H}{b} \right) - a \quad [\text{III.10}]$$

En conséquence :

$$\begin{cases} U \approx \frac{aH}{2b} & \text{pour } H \ll b \\ U \approx a \left[\log \left(\frac{H}{b} \right) - 1 \right] & \text{pour } H \gg b \end{cases} \quad [\text{III.11}]$$

La connaissance des dépendances de a et de b en fonction de H et de θ permet donc de remonter à la loi d'échelle. Celles-ci sont représentées sur la figure III-17.

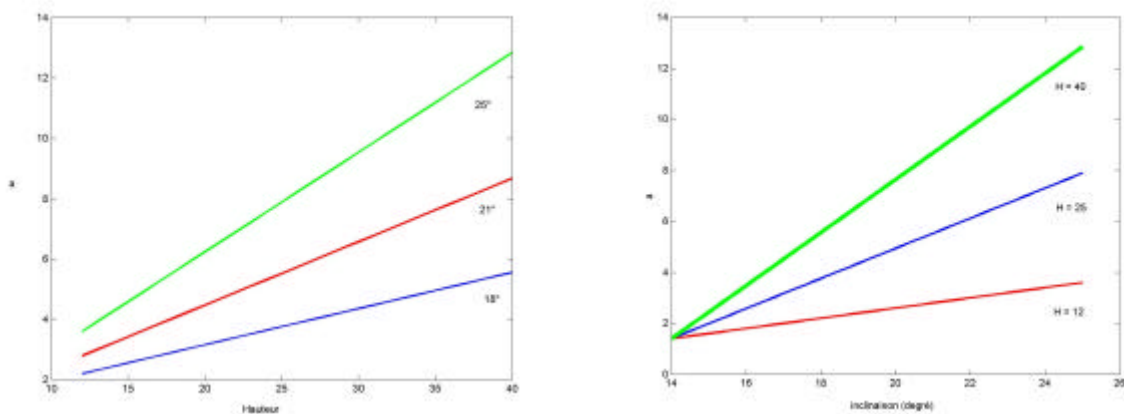


Figure III-17 : Dépendances de a en fonction de H et θ
(points issus des simulations numériques et ajustement (III-12)).

On observe ainsi que b est de l'ordre de 5 pour les inclinaisons proches du seuil d'écoulement et diminue vers 1 pour des inclinaisons plus importantes. Par ailleurs b n'a pas de dépendance marquée en H ($b = 8$ à 10 pour $H = 40$!). Ceci signifierait que l'influence du socle se manifeste sur environ 5 couches près du seuil d'écoulement et diminue pour les inclinaisons plus élevées où le milieu devient plus dilué. Les dépendances de a sont moins triviales et semblent pouvoir être approximées de la façon suivante :

$$\begin{cases} a = a_1 + a_2 (\theta - \theta_1) & \text{pour } H < H_0 \\ a = a_1 + a_2 (\theta - \theta_1) + a_3 (\theta - \theta_2) (H - H_0) & \text{pour } H > H_0 \end{cases} \quad \text{[III.12]}$$

avec $\theta_1 = 12^\circ$, $\theta_2 = 14^\circ$, $H_0 = 12$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0,2$ et $a_3 = 0,03$ (pour des inclinaisons en degrés). Nous traçons alors le nombre de Froude en fonction de H/H_{stop} compte-tenu de ces dépendances pour a et b (figure III-18). La partie H/H_{stop} petit est mal représentée (il faudrait affiner l'analyse des dépendances de a et de b). Par contre H/H_{stop} grand donne une loi approximativement linéaire avec une pente proche de 0,136.

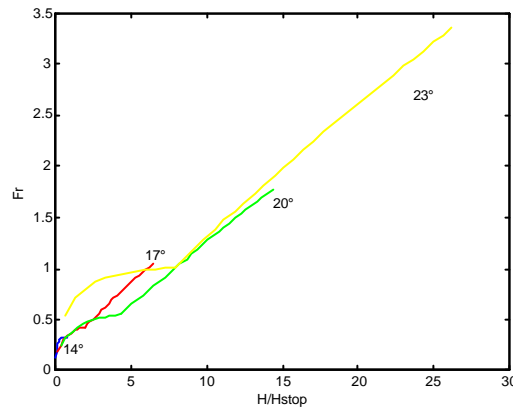


Figure III-18 : Loi d'échelle à partir des paramètres a et b .

IV.A.3. Fluctuations

Au-delà de la vitesse moyenne, il semble intéressant de mesurer les fluctuations du mouvement. Déjà, l'analyse sommaire des trajectoires avait révélé des mouvements compliqués (oscillations dans les couches proches du socle, diffusion à une certaine distance du socle), et l'on peut se demander quel est l'ordre de grandeur de ces fluctuations, comment elles dépendent de la distance au socle, ou encore quelle est leur amplitude relative selon x et y .

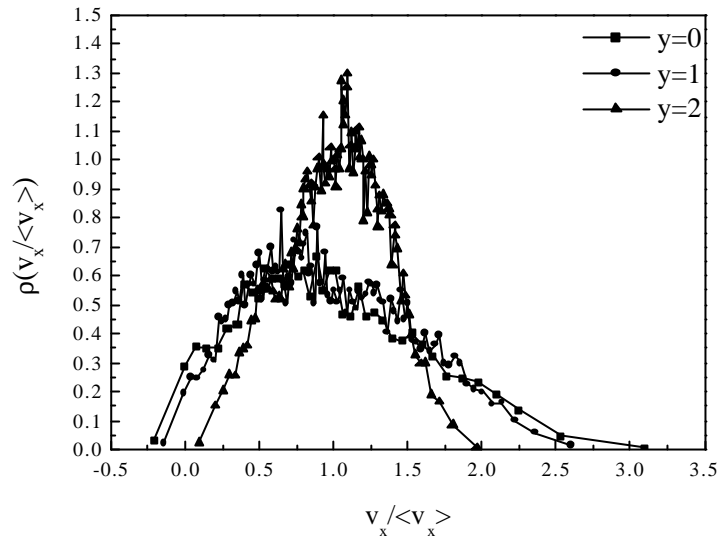


Figure III - 19 : Distribution de la vitesse v_x normalisée par sa valeur moyenne dans les couches proches du socle ($y = 0, 1$ et 2) ($q = 20^\circ$ - $N = 500$ - $p = 0,15$).

On constate d'abord qu'à l'exception des toutes premières couches (figure III-19), la fonction de distribution des vitesses est raisonnablement gaussienne :

$$\rho(v_r) = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(v_r - \langle v_r \rangle)^2}{2\sigma_r^2}} \quad [\text{III.13}]$$

où l'indice r indique x ou y . Dans un écoulement donné, la vitesse moyenne et l'écart type dépendent de l'altitude y , mais on représente sur la figure III-20 l'histogramme des vitesses centrées-réduites.

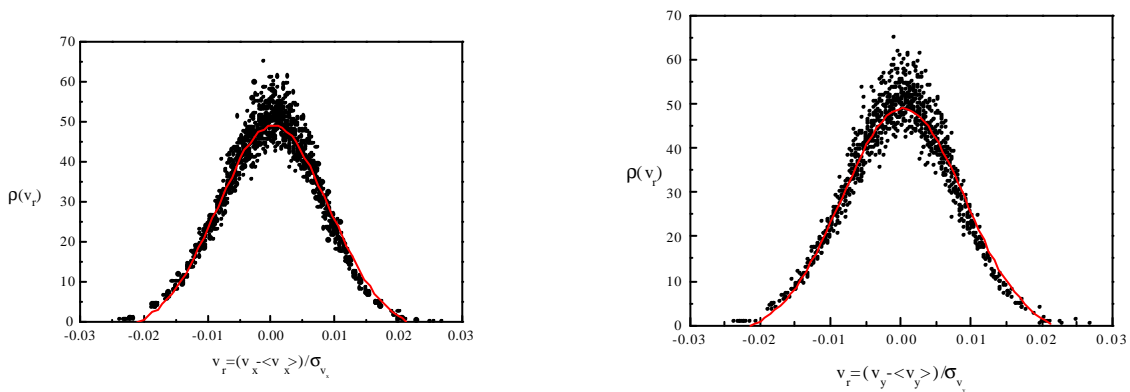


Figure III - 20 : Distribution normalisée des composantes v_x et v_y et comparaison avec une distribution gaussienne (-).

($N = 500$ - $q = 20^\circ$ - $p = 0,15$)

Par analogie avec la théorie cinétique (voir chapitre V), on définit les "températures granulaires" $T_x = \sigma_x^2$ et $T_y = \sigma_y^2$, et on en trace les profils sur la figure III-21. La tendance générale est une forte décroissance du socle vers la surface libre, avec une certaine saturation, et peut-être même une certaine remontée près de la surface libre. En terme imagé, l'écoulement est "chauffé" par le socle et se refroidit vers la surface libre. Dans les toutes premières couches on observe des oscillations associées à la structuration et une tendance à une augmentation, particulièrement pour T_y . On note par ailleurs une augmentation des fluctuations avec l'inclinaison : le milieu est alors plus dilué et plus agité. Enfin, la figure III-22 mesure l'anisotropie des fluctuations. T_x et T_y restent voisins, sauf à proximité du socle ou lorsque l'inclinaison commence à augmenter, les fluctuations selon x étant alors plus marquées que les fluctuations selon y . Dans la suite, $T = (T_x + T_y) / 2$.

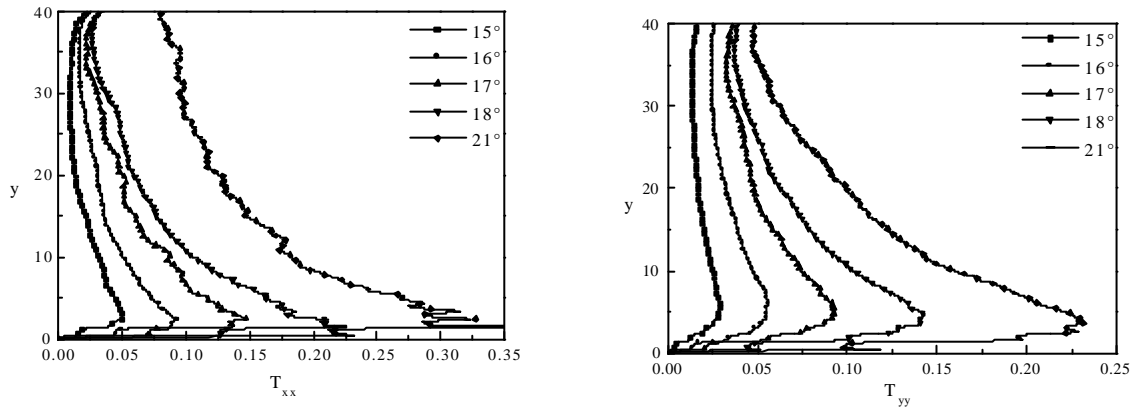


Figure III - 21 : Profils de température T_x et T_y ($N = 5000 - p = 0,15$).

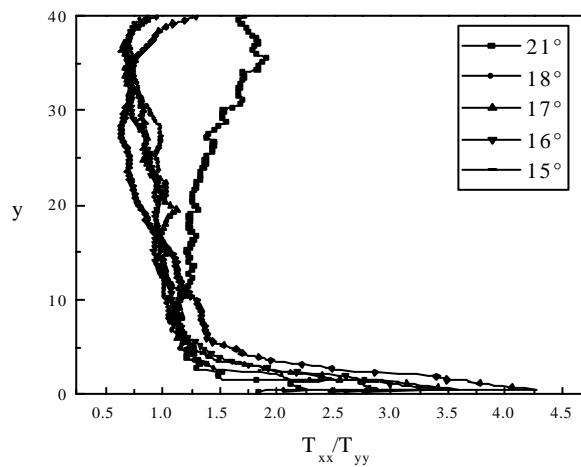


Figure III - 22 : Anisotropie des fluctuations de vitesse ($N = 5000 - p = 0,15$).

La forme des profils de température est très voisine de celle des profils de taux de cisaillement, et nous avons donc tenté de comparer les deux. Cette comparaison est attendue au vu de ce que nous avons expliqué au chapitre II.4.A : en régime collisionnel, on s'attend à une proportionnalité entre T et $\dot{\gamma}^2$, mais en régime dense, certaines observations récentes indiqueraient plutôt une proportionnalité entre T et $\dot{\gamma}$. Le résultat (figure III-23) penche clairement en faveur de la deuxième hypothèse.

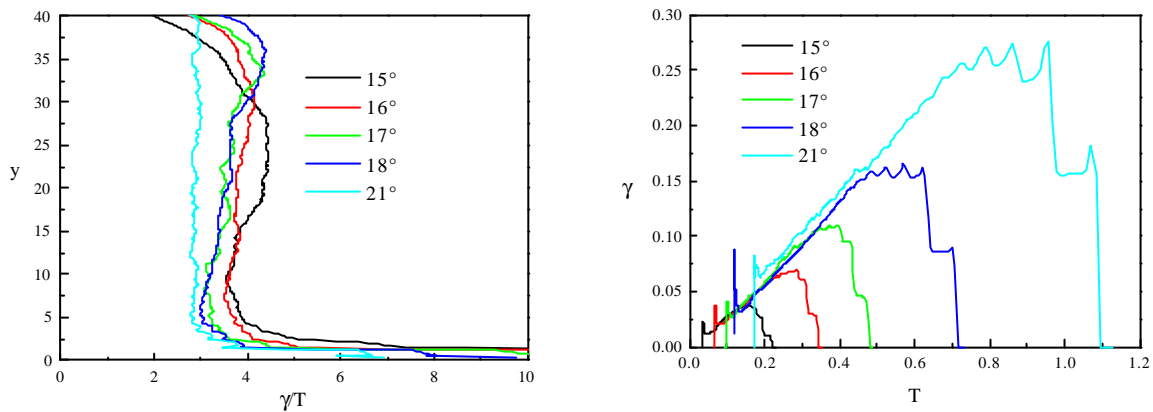


Figure III-23 : Proportionnalité entre température et taux de cisaillement

($N = 5000$ - $p = 0,15$)

Le facteur de proportionnalité ($\dot{\gamma}/T$) est de l'ordre de 3 à 4. Il ne dépend que très faiblement de l'inclinaison. On note toutefois des déviations à cette loi dans les couches proches du socle et celles proches de la surface libre.

La forme des profils de température mesurés par l'équipe américaine est tout à fait comparable (décroissance depuis le socle). En revanche, ils observent une proportionnalité entre T et $\dot{\gamma}^2$, signe d'un écoulement collisionnel (mais pour $e = 0,9$).

IV.B. Vitesse de rotation

IV.B.1. a. Vitesse moyenne

La vitesse de rotation moyenne des grains est systématiquement égale au demi-gradient de vitesse (figure III-24) :

$$\langle \omega \rangle \simeq \frac{1}{2} \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \quad [\text{III.14}]$$

Des déviations existent cependant dans les toutes premières couches près du socle. Cette relation est analogue à celle obtenue en hydrodynamique pour un fluide. Elle a été observée dans de nombreuses simulations numériques d'écoulement, tant en 2D qu'en 3D [Campbell85a et b, Lun94, Dippel98, Azanza98, Veje99, Lätzel00, daCruz02b], et dans les déformations quasi-statiques (rotation moyenne égale à la demi-distorsion) [Calvetti97]. On expliquera ce résultat au chapitre V, mais il nous faudra préalablement décrire comment le frottement est mobilisé dans l'écoulement granulaire (voir Chap III § V.B.1.c).

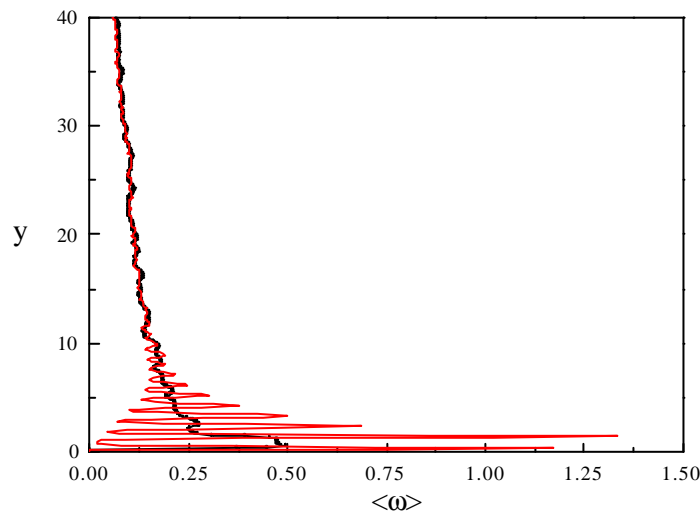


Figure III - 24 : Vitesse de rotation moyenne (en noir) comparée au demi-gradient de vitesse (en rouge).

Profils bruts. ($N = 5000$ - $q = 18^\circ$ - $p = 0,15$).

IV.B.2. Fluctuations

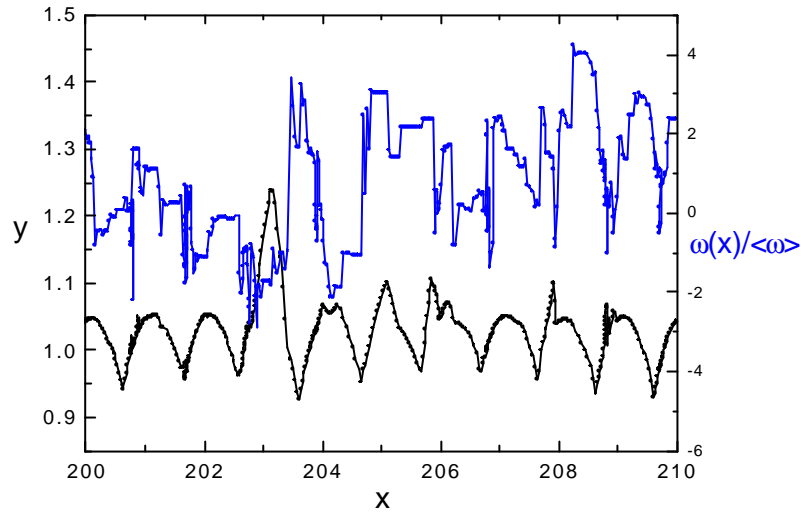


Figure III-25 : Evolution dans l'espace de la vitesse de rotation d'un grain normalisée par la valeur moyenne (en bleu) et de sa trajectoire (en noir)

La vitesse de rotation des grains est cependant très fluctuante (figure III-25). On mesure la distribution de cette vitesse de rotation (figure III-26), et l'on observe qu'elle est plutôt lorentzienne que gaussienne :

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \langle\omega\rangle}{\Delta\omega} \right)^2} \quad [\text{III.15}]$$

avec $\Delta\omega = \sqrt{\langle (\omega - \langle\omega\rangle)^2 \rangle}$

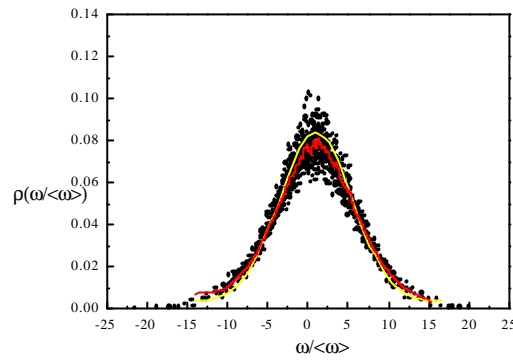


Figure III -26 : Distribution normalisée de la vitesse de rotation et comparaison avec une distribution lorentzienne (-) ($N = 500$ - $q = 20^\circ$ - $p = 0,15$).

On constate que cette distribution est très large : $\Delta\omega/\langle\omega\rangle$ est d'ordre 5, et ce indépendamment de z (figure III-28) (bien que $\Delta\omega$ et $\langle\omega\rangle$ dépendent chacun de z) et indépendamment de θ . Ceci est un résultat étonnant au vu de la relation (III-14) qui reste valide en moyenne. Ce résultat est observé dans des études expérimentales, soit des déformations quasi-statiques ($\Delta\omega/\langle\omega\rangle > 5$) [Calvetti97], soit d'écoulements de polygones, qui seront décrits dans la dernière partie de ce chapitre ($\Delta\omega/\langle\omega\rangle \approx 10$) [Moucheront00, Paris00], soit encore en cisaillement simple [daCruz02b]. La figure III-27 montre les profils de fluctuations de vitesse de rotation : à l'exception du comportement sur les toutes premières couches, les fluctuations de vitesse de rotation sont maximales près du socle et décroissent ensuite rapidement vers la surface libre. Par ailleurs, elles augmentent avec l'inclinaison. On retrouve le même comportement que pour le taux de cisaillement, la vitesse de rotation moyenne et les températures de translation. En effet, il existe une relation du type $\Delta\omega = a\dot{\gamma}^b$ avec $a \approx 2,2$ et $b \approx 0,75$. On a tracé sur la figure III-28 le profil de $\Delta\omega/\langle\omega\rangle$, ainsi que la loi d'échelle reliant le taux cisaillement aux fluctuations de vitesse de rotation.

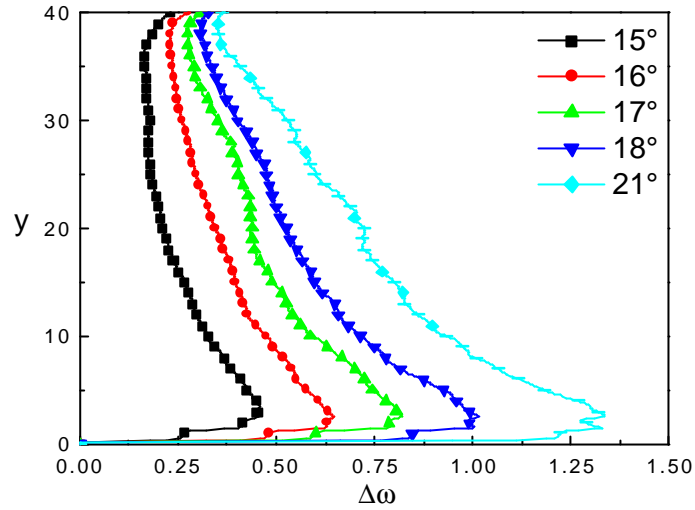


Figure III - 27 : Profils des fluctuations de vitesse de rotation ($N = 5000 - p = 0,15$).

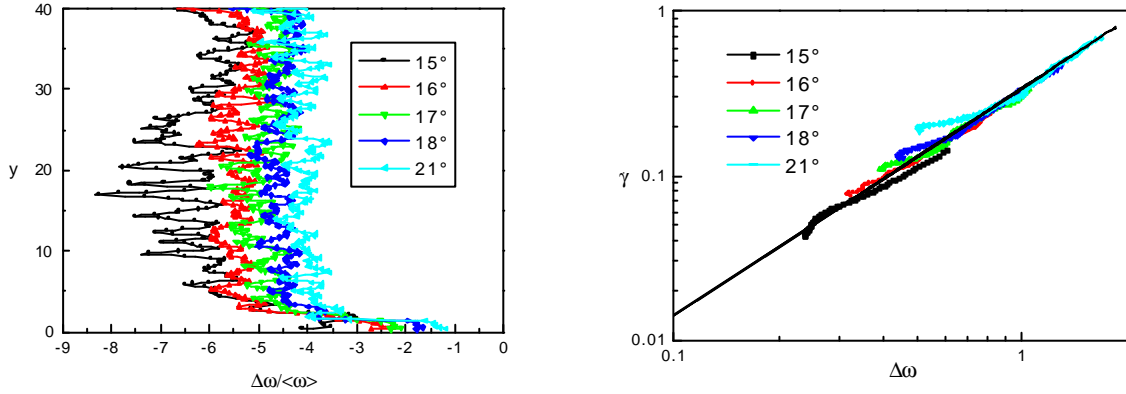


Figure III - 28 : Comparaison entre fluctuations et moyenne pour la vitesse de rotation ($N = 5000 - p = 0,15$).

V. Réseau de contact - Texture

A chaque pas de temps, la méthode de dynamique des contacts indique le réseau des contacts actifs et fournit la liste des percussions sur ce réseau. Ces percussions peuvent être transformées en force moyenne, en les divisant par le pas de temps. La figure III-29 montre un instantané du réseau des forces de contact normales. L'orientation des forces est représentée par le segment joignant les centres des particules en contact, et l'intensité est représentée par l'épaisseur (en échelle logarithmique). On observe un réseau de "chaînes de force" plus ou moins discontinu, hétérogène spatialement et très fluctuant temporellement.

Nous allons maintenant nous attacher à le décrire quantitativement, d'abord géométriquement, puis en terme de forces. Pour cela, nous utiliserons les grandeurs précisées sur la figure III-30: un contact C est repéré par un angle φ et il lui est associé une base (\mathbf{n}, \mathbf{t}) . A chaque pas de temps du calcul, on dispose d'une famille de contacts repérés par la cote y et l'orientation φ par rapport à la pente, sur laquelle on procède à une analyse statistique. L'écoulement étant stationnaire et uniforme, tous les instants et toutes les positions x sont équivalents. Les grandeurs mesurées vont donc dépendre de y et de φ . Nous renvoyons à l'Annexe 5 pour plus de détail sur les techniques de prise de moyenne (intensité et orientation des forces de contact).

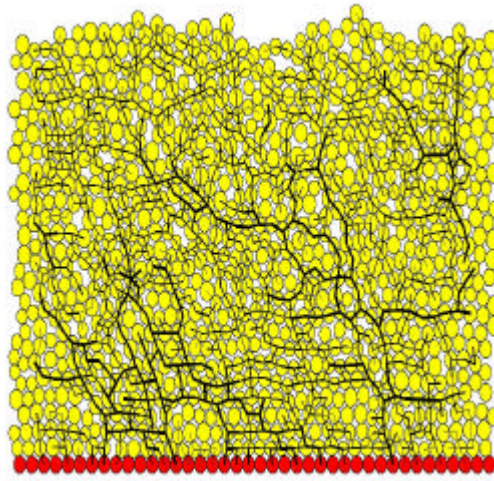


Figure III - 29 : Image instantanée du réseau des forces normales - échelle logarithmique
($N = 1000$ - $q = 19^\circ$ - $p = 0,15$).

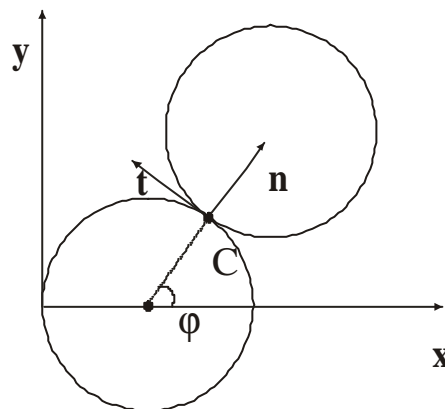


Figure III - 30 : Orientation du contact entre deux grains repérée par un angle j
par rapport à la direction d'écoulement ($x'0x$).

V.A. Géométrie du réseau de contact

Nous allons commencer par décrire la géométrie de ce réseau de contact, indépendamment du module de la force.

V.A.I. Anisotropie

Ceci peut être fait au moyen de la distribution $\rho(\varphi)$ des orientations de contact, de période π par symétrie (un contact compté dans la direction φ doit l'être aussi dans la direction $\varphi + \pi$, avec la même percussion) et normalisée :

$$\int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi = 1 \quad \text{[III.16]}$$

La figure III-31 montre que, malgré sa structure très complexe, le réseau de contact présente deux orientations préférentielles très marquées, l'une dans la direction de l'écoulement au sein d'une même couche, l'autre dans la direction de la compression de l'écoulement entre deux couches. On observe par ailleurs que les directions entre 30° et 60° sont très peu fréquentes, et ce d'autant plus que l'écoulement est proche de l'arrêt.

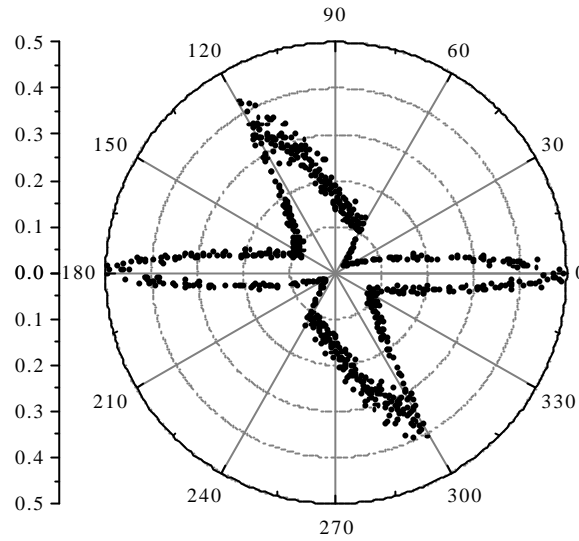


Figure III - 31: Distribution angulaire des orientations de contact dans toute la couche
($N = 500$ - $q = 20^\circ$ - $p = 0,1$).

La figure III-32 montre cette distribution angulaire dans les premières couches près du socle où le milieu est assez structuré, de sorte que la trajectoire des particules épouse le relief imposé par leurs voisines, et la distribution très piquée peut se comprendre à partir de l'image du glissement de deux couches l'une sur l'autre. A plus grande distance du socle, le milieu est moins structuré et la distribution devient plus uniforme et indépendante de la distance au socle.

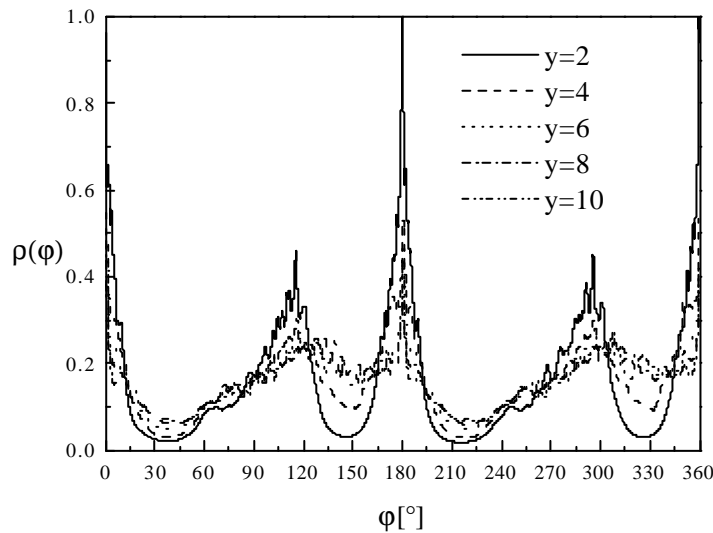


Figure III - 32 : Distribution des orientations de contacts dans différentes couches.
($N = 500$ - $q = 25^\circ$ - $p = 0,1$).

Cette distribution peut-être ajustée par un développement en série de Fourier :

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_n A_n \cos 2n(\varphi - \varphi_n) \right] \quad [\text{III.17}]$$

Les coefficients A_n mesurent l'intensité et les angles φ_n les directions de l'anisotropie. La figure III-33 montre qu'il faut un développement à l'ordre 3, adopté dans la suite, pour obtenir un ajustement satisfaisant. Notons que ce développement donne un meilleur ajustement que le développement :

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \sum_n A_n \cos 2(\varphi - \varphi_n) \right] \quad [\text{III.18}]$$

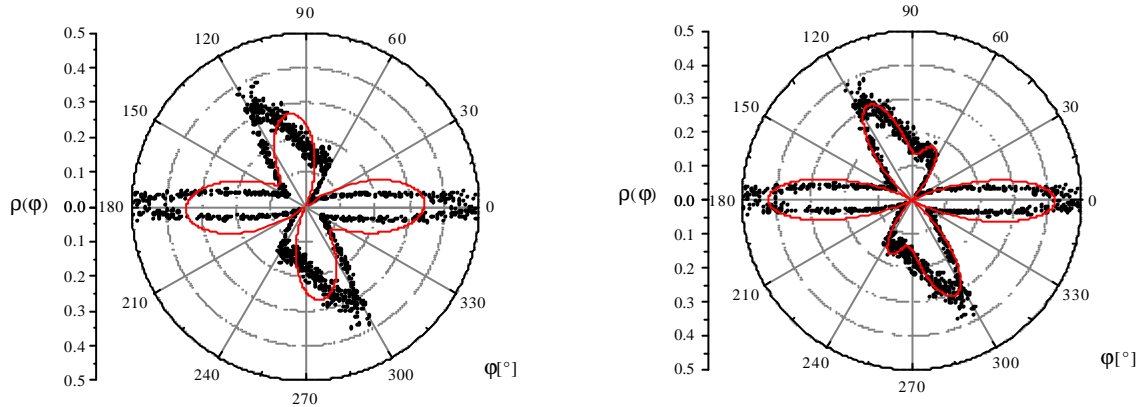


Figure III - 33: Distribution des orientations de contact ($N = 500$ - $q = 17^\circ$ - $p = 0,1$).
 Comparaison avec les développements en série de Fourier d'ordre 2 (à gauche) et 3 (à droite).

Lorsque que l'on augmente l'inclinaison, et donc lorsque le milieu se dilate, cette anisotropie tend à s'estomper (figure III-34).

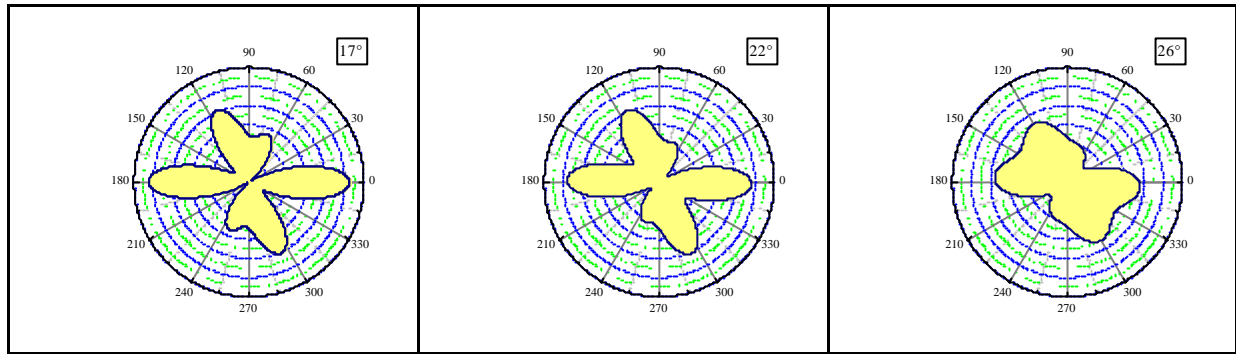


Figure III - 34 : Distribution des orientations de contact selon l'inclinaison (série de Fourier d'ordre 3)

($N = 500 - p = 0,1$). L'échelle est identique à la figure III-33.

Une deuxième grandeur pouvant renseigner sur les anisotropies est le tenseur de texture (cf. Annexe 6). On représente sur la figure III-35 l'orientation de l'axe principal majeur par rapport à la direction de l'écoulement. Elle vaut environ 140° , quelque soit la distance au socle (sauf dans les toutes premières couches).

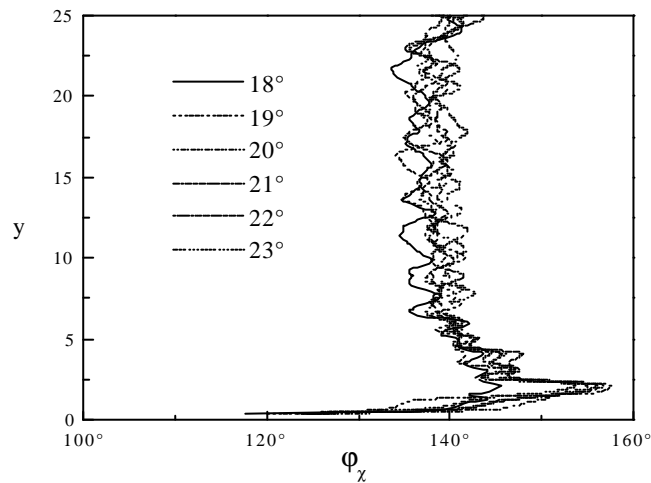


Figure III - 35 : Direction de l'axe principal ($N=1000 - p=0,15$).

V.A.2. Coordinance

La figure III-36 montre le profil de la coordinance z au sein de l'écoulement, pour différentes inclinaisons. On note qu'elle est notablement plus faible dans les premières couches près du socle et près de la surface libre. Par ailleurs, elle diminue lorsque l'inclinaison augmente (dilatance). La figure III-37 montre la variation de la coordinance moyenne sur toute l'épaisseur en fonction de l'inclinaison. Cette variation est particulièrement marquée au voisinage de l'arrêt. La coordinance atteint une valeur de 3,5 près de l'arrêt (à comparer à la valeur entre 3 et 4 mesurée pour les déformations quasi-statique de systèmes

polydisperses [Calvetti97]). L'équipe américaine observe une coordinance plus faible, ce qui est logique s'agissant d'écoulements plus collisionnels.

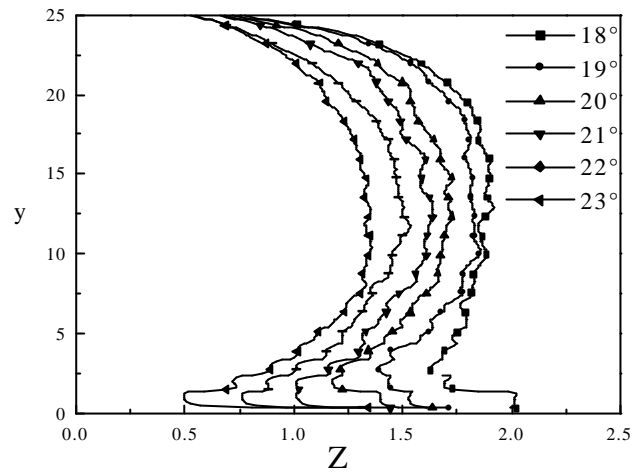


Figure III - 36 : Profils de coordinance ($N = 1000 - p = 0,15$). L'écoulement à 23° est accéléré.

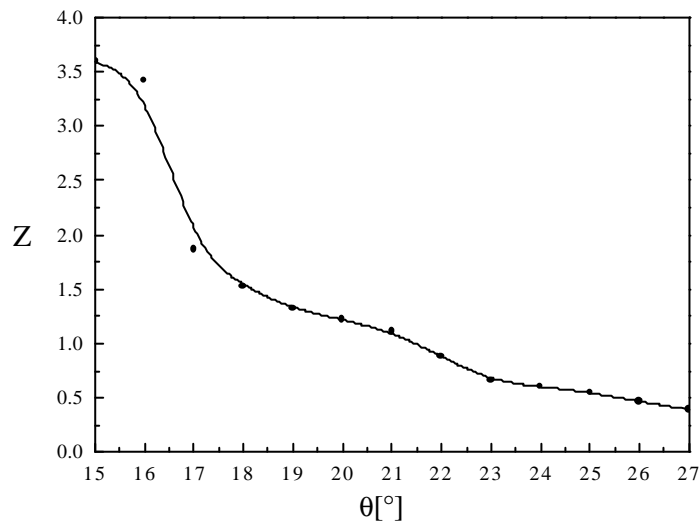


Figure III - 37 : Coordinance moyenne en fonction de l'inclinaison
($N = 1000 - p = 0.15$)

V.B. Forces de contact

Après avoir discuté la géométrie du réseau de contact, nous analysons la distribution des forces de contact elles mêmes. Chaque force F se décompose en deux parties, normale et tangentielle :

$$\mathbf{F} = \mathbf{N} + \mathbf{T} = N \cdot \mathbf{n} + T \cdot \mathbf{t} \quad [\text{III.19}]$$

où (\mathbf{n}, \mathbf{t}) représente la base associée au point de contact (cf. figure III-30). Nous nous intéressons d'abord à la distribution $\rho(F)$ de l'intensité de la force, indépendamment de son orientation. F peut-être le module d'une force de contact ou de l'une de ses composantes (normale ou tangentielle) (voir Annexe 5).

Au sein d'une couche homogène de grains soumise à la gravité, la force moyenne $\langle F \rangle$ est essentiellement proportionnelle à la profondeur. La Figure III-38 montre le profil de la force normale moyenne $\langle N \rangle$ (y). Ceci est bien cohérent avec l'observation d'une compacité constante, sauf près de la surface libre et près du socle (structuration). De ce fait, toute analyse de la distribution des forces doit tenir compte du niveau de force moyen à l'altitude considérée.

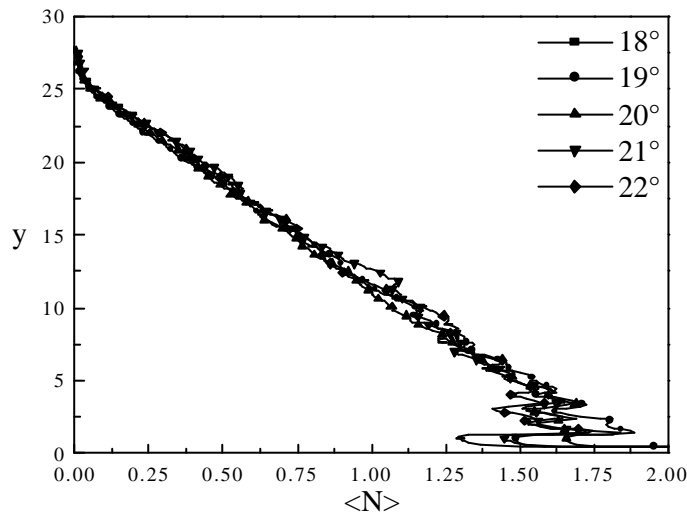


Figure III - 38 : Profil de la force normale moyenne ($N = 1000 - p = 0,15$).

V.B.1. Distribution

V.B.1.a. Forces normales

Plutôt que l'histogramme des forces normales, on calcule l'histogramme de $\xi_N = N / \langle N \rangle$, la force normale normalisée par la force normale moyenne $\langle N \rangle$ (y) à l'altitude

considérée. Dans la statistique, chaque classe $d\xi_N$ est constituée de 100 éléments. La fonction de distribution vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \rho(\xi_N) d\xi_N = 1 \\ \int_0^{\infty} \rho(\xi_N) \xi_N d\xi_N = 1 \end{array} \right. \quad [\text{III.20}]$$

On choisit de représenter cet histogramme en échelle logarithmique. On observe une distribution très large de force couvrant jusqu'à 8 décades (figure III-40). On a procédé à une telle analyse couche par couche, et l'on a observé que les distributions sont indépendantes de l'altitude - sauf peut-être au niveau du socle et de la surface libre qui sont le siège de comportements atypiques (figure III-39). Ces distributions normalisées sont également indépendantes de l'angle d'inclinaison du plan comme le montre la figure III-40.

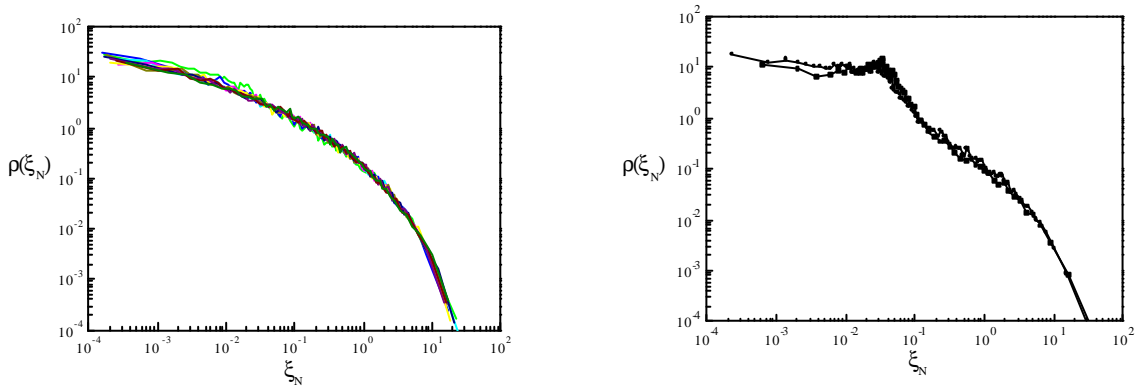


Figure III - 39 : Distribution des forces normales dans différentes couches en échelle logarithmique. A gauche: couches éloignées du socle. A droite, deux premières couches ($N = 1000$ - $q = 19^\circ$ - $p = 0,15$).

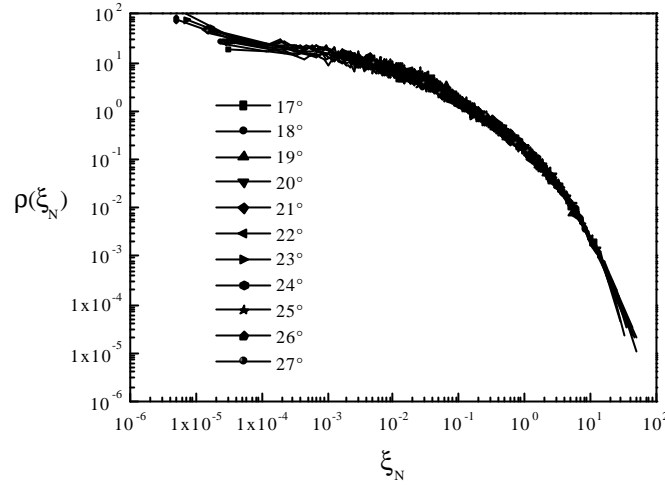


Figure III - 40 : Distribution des forces normales à différentes inclinaisons en échelle logarithmique ($N=1000 - p = 0,15$). Les écoulements à 26° et 27° sont accélérés.

On a vu au chapitre II § IV.B que l'on pouvait définir les réseaux faible et fort correspondant aux forces respectivement inférieures et supérieures à la valeur moyenne ($\xi_N = 1$). La figure III-41 représente l'intégrale cumulée de la fonction de distribution des forces normales. On constate que dans les écoulements granulaires denses les contacts faibles sont dominants (jusqu'à 78% du total des contacts, au lieu de 60% en statique). On remarque que $I(\xi_N)$ est une fonction linéaire de $\log \xi_N$ pour $3 \cdot 10^{-2} \leq \xi_N \leq 2$. Dans cette plage des forces moyennes, correspondant à près de 70% des contacts, $\rho(\xi_N) = \frac{a}{\xi_N}$.

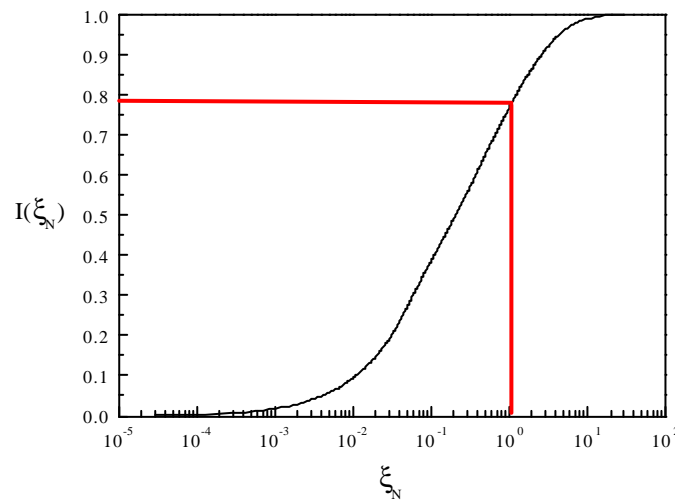


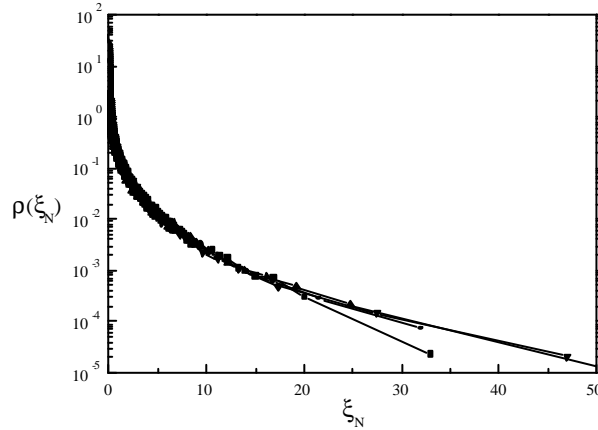
Figure III - 41 : Intégrale cumulée de la distribution des forces normales ($N = 500 - q = 20^\circ - p = 0,15$).

S'inspirant de l'analyse de [Radjai95] pour les déformations quasi-statiques, on analyse les forces faibles en échelle log-log, et les forces fortes en échelle semi-log. L'échelle log-log (figure III-40) montre que la distribution des forces très faibles ($\xi_N < 0,01$, soit environ 10% des contacts) est en loi de puissance. L'échelle semi-log (figures III-42) montre que la distribution des forces fortes ($\xi_N > 5$, soit environ 10% des contacts) est exponentielle. En résumé, la distribution des forces normales s'écrit :

$$\rho(\xi_N) = \begin{cases} \rho_c \xi_N^\alpha & \text{si } \xi_N \ll 1 \\ \rho'_c e^{\beta(1-\xi_N)} & \text{si } \xi_N \gg 1 \end{cases} \quad [\text{III.21}]$$

avec $\alpha = -0,29 \pm 0,05$, $\beta = 0,24 \pm 0,05$, $\rho'_c = 2,44$ et $\rho_c = 0,04$.

On retrouve donc les comportements asymptotiques observés pour des déformations quasi-statiques, mais avec des exposants α et β différents (pour Radjai $\alpha = -0.3$ et $\beta = 1.4$). Par ailleurs, la transition entre les deux modes de la distribution est moins nette. On note aussi près de l'arrêt l'apparition d'un plateau aux faibles forces, aussi observée par [Silbert02a] et qui serait l'indicateur de la transition liquide-solide ("jamming").



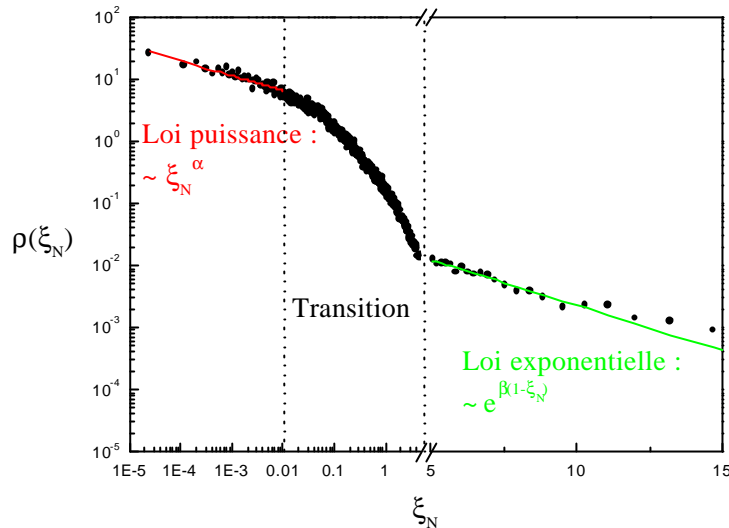


Figure III - 42 : a : Distribution des forces normales en échelle semi-logarithmique ($N=1000$ - $q = 17^\circ, 20^\circ$ et 23° - $p = 0,15$) b : Comportements asymptotiques des forces normales ($N = 1000$ - $q = 18^\circ$ - $p = 0,1$).

V.B.1.b. Forces tangentielles

La force tangentielle, associée au frottement entre grains secs, vérifie le critère de Coulomb : $-\mu N < T < \mu N$, l'égalité correspondant au cas du glissement (vitesse tangentielle relative au point de contact non nulle). La même inégalité est obtenue pour les composantes tangentielles et normales de la percussion (c'est alors la vitesse tangentielle formelle relative au point de contact qui intervient). La figure III-43 représente l'ensemble des couples (force normale, force tangentielle) au sein d'un écoulement. Ces forces se trouvent à l'intérieur du cône de Coulomb $|T| < \mu N$. Les points situés sur la frontière représentent les contacts où la force de frottement est complètement mobilisée.

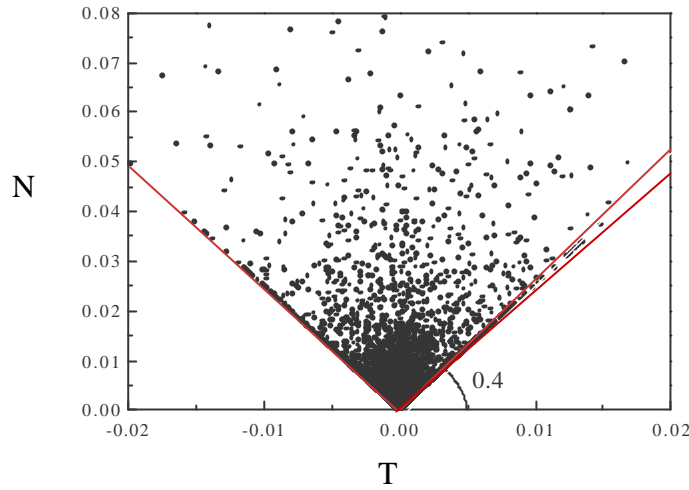


Figure III - 43 : Cône de Coulomb des forces de contacts.

Une première analyse statistique, analogue à celle menée pour les forces normales, concerne la variable $\xi_T = |T|/\langle |T| \rangle$, c'est-à-dire l'intensité de la force tangentielle normalisée par sa valeur moyenne (on doit ici raisonner sur le module, car T peut être positive ou négative). La distribution vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} \rho(\xi_T) d\xi_T = 1 \\ \int_0^{\infty} \rho(\xi_T) \xi_T d\xi_T = 1 \end{array} \right. \quad \text{[III.22]}$$

On observe exactement la même forme de distribution que pour les forces normales (figure III-44).

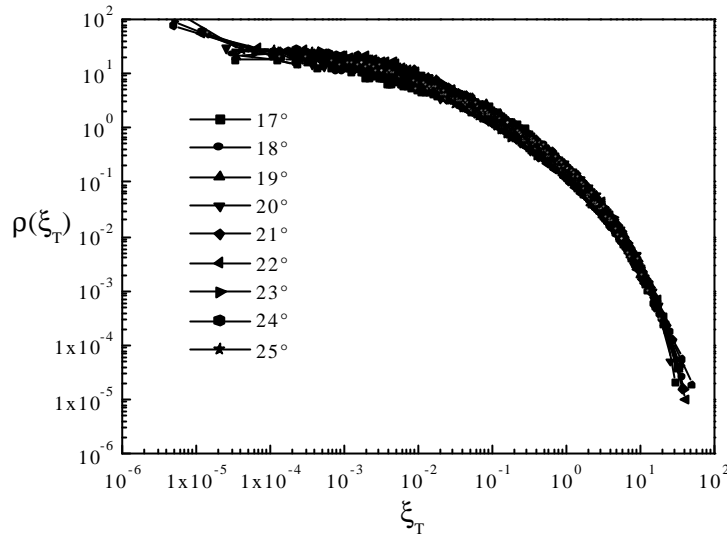


Figure III - 44: Distribution des forces tangentielles en échelle logarithmique ($N = 1000 - p = 0,15$). Les écoulements à 26° et 27° sont accélérés.

V.B.1.c. Mobilisation du frottement

Nous étudions ensuite statistiquement comment le frottement est mobilisé. On considère le frottement effectif $\mu_{\text{eff}} = T/\mu N$, compris entre -1 et 1 . Le contact est glissant pour $\mu_{\text{eff}} = \pm 1$, roulant sinon. L'allure générale de la distribution est montrée sur la figure III-45 : une distribution uniformément décroissante pour les contacts roulants, et un pic pour les contacts glissants, ce qui a déjà été mis en évidence par [Radjai95] pour les déformations lentes. La statistique est indépendante de l'angle d'inclinaison, mais également de la distance au socle.

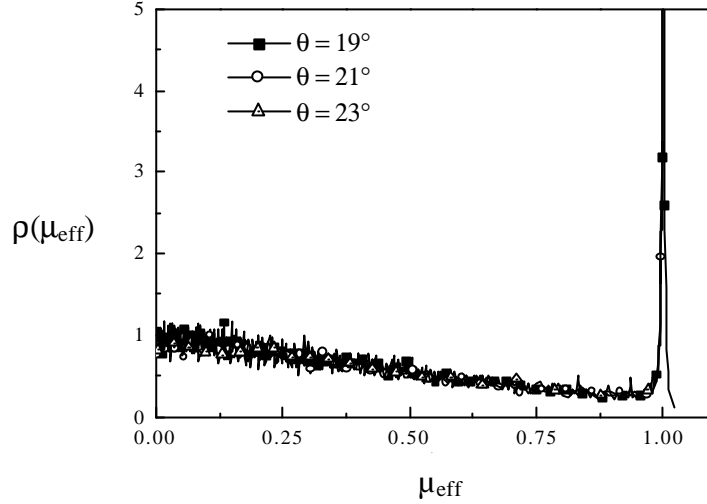


Figure III - 45: Distribution de la mobilisation du frottement ($N = 500$ - $m = 0,4$ - $p = 0,15$).

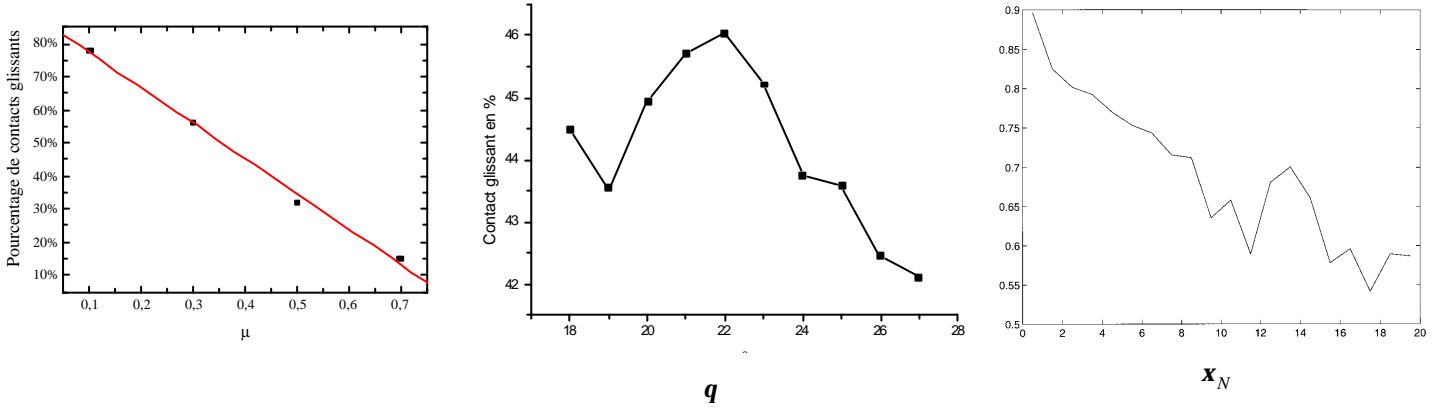


Figure III - 46 : Proportion de contacts glissants en fonction

- a. du coefficient de frottement ($N = 500$ - $p = 0$)
- b. de l'inclinaison ($N = 1000$ - $m = 0,4$ - $p = 0,15$),
- c. de l'intensité de la force normale ($N = 500$ - $m = 0,4$ - $p = 0$).

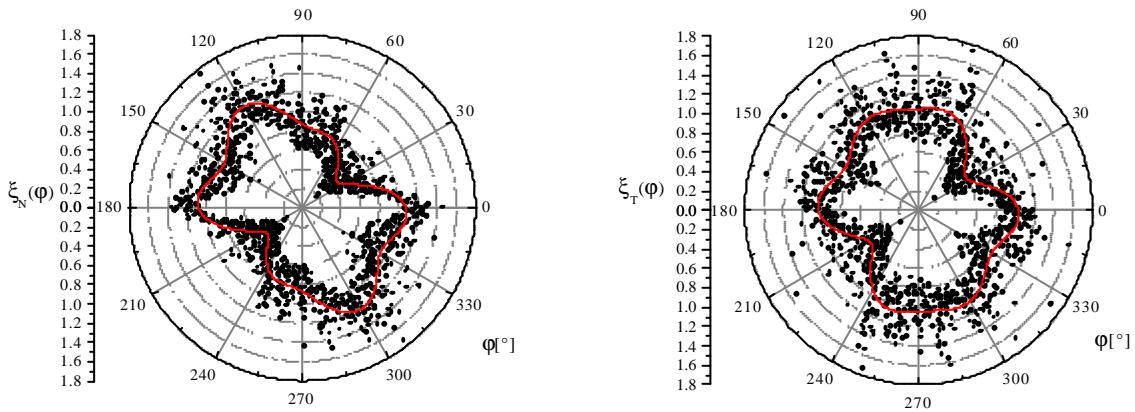
La proportion de contacts glissants (figure III-46) dépend peu de l'inclinaison. Elle décroît fortement avec le coefficient de frottement: de 80% à $\mu = 0,1$ à 20% pour $\mu = 0,7$. Pour $\mu = 0,4$, cette proportion est d'environ 45 %. Elle décroît ~~fortement~~ avec l'intensité de la force normale, de 80% pour les faibles forces ($N < \langle N \rangle$) à 30 % pour les forces fortes ($N > 10 \langle N \rangle$). Ces résultats sont à comparer avec ceux mesurés par [Radjai95] en quasi-statique.

V.B.2. Anisotropie

Des expériences [Calvetti97] et des simulations numériques [Campbell85a] montrent des anisotropies lors du cisaillement. Les distributions des forces normales et tangentielles présentent une anisotropie marquée, associée aux directions privilégiées des contacts, qui est quantifiée par les distributions angulaires des forces moyennes (normale ou tangentielle) en fonction de l'orientation φ du contact $\xi_N(\varphi)$ et $\xi_T(\varphi)$, normalisée selon :

$$\int_0^{2\pi} \xi_{N,T}(\varphi) \rho(\varphi) d\varphi = 1 \quad [\text{III.23}]$$

La figure III-47 montre les distributions brutes $\xi_N(\varphi)$ et $\xi_T(\varphi)$ et leurs approximations en série de Fourier tronquées à l'ordre 3, pour trois inclinaisons. La distribution $\xi_N(\varphi)$ a une forme de cacahuète dans la "direction de compression" de l'écoulement. Cette forme n'évolue pratiquement pas lorsque l'inclinaison du plan augmente. La distribution $\xi_T(\varphi)$ évolue avec l'inclinaison du plan d'une forme de trèfle à six feuilles à une forme de cacahuète lorsque l'inclinaison augmente. Sa direction principale est toujours celle correspondant à la direction de compression de l'écoulement.



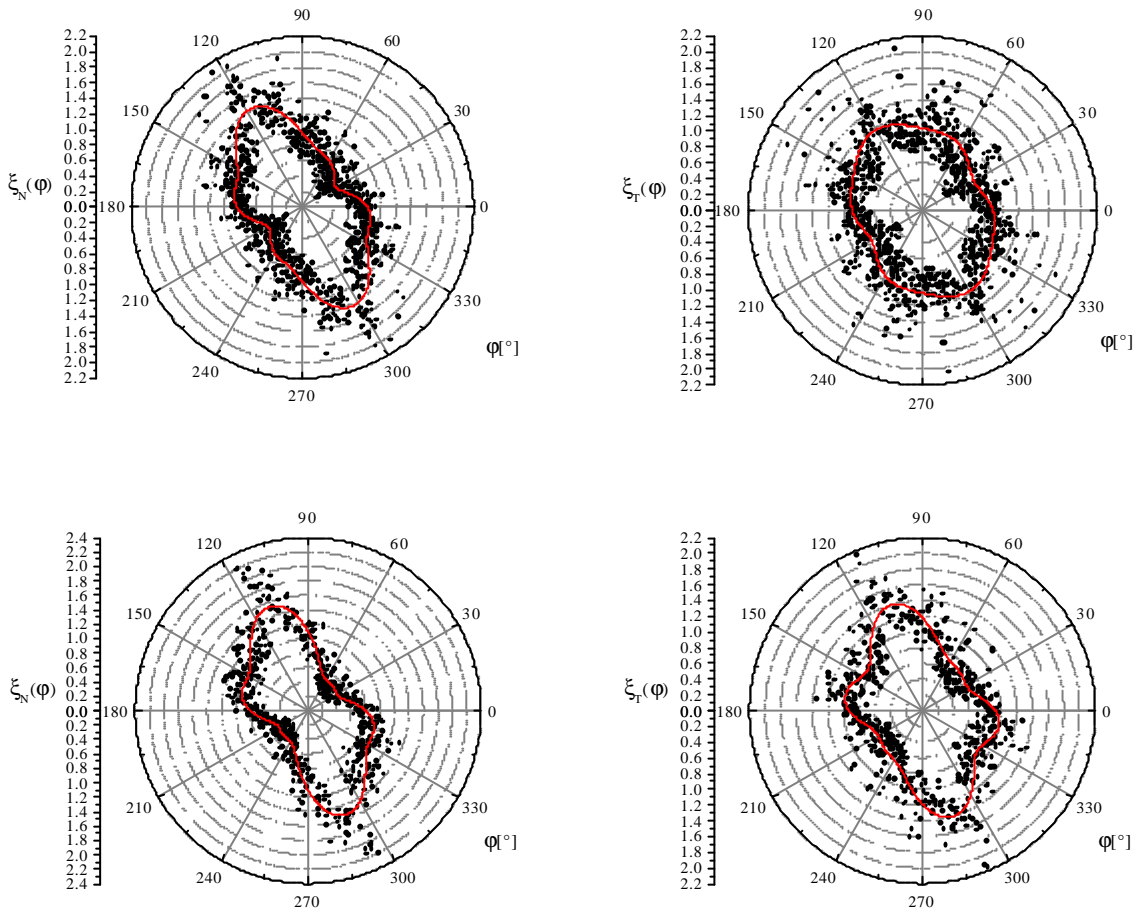


Figure III - 47 : Anisotropie des forces normale (à gauche) et tangentielle (à droite)

$$(N = 500 - q = 17^\circ, 22^\circ \text{ et } 26^\circ - p = 0,1)$$

On s'intéresse enfin à l'anisotropie de la mobilisation du frottement $\mu_{\text{eff}}(\varphi)$ (figures III-48 et 49). Cette mobilisation est maximale (positive) perpendiculairement à l'écoulement et minimale (négative) dans la direction de l'écoulement. On remarque également que cette distribution est asymétrique près de l'angle seuil, avec une mobilisation plus importante du frottement entre couches, mais devient symétrique pour des inclinaisons plus élevées. On remarque aussi que le frottement n'est jamais complètement mobilisé. Le coefficient de frottement effectif est de l'ordre de 30 à 40 % du coefficient de frottement entre grains.

La figure III-50 rassemble les informations sur les anisotropies du réseau de contact.

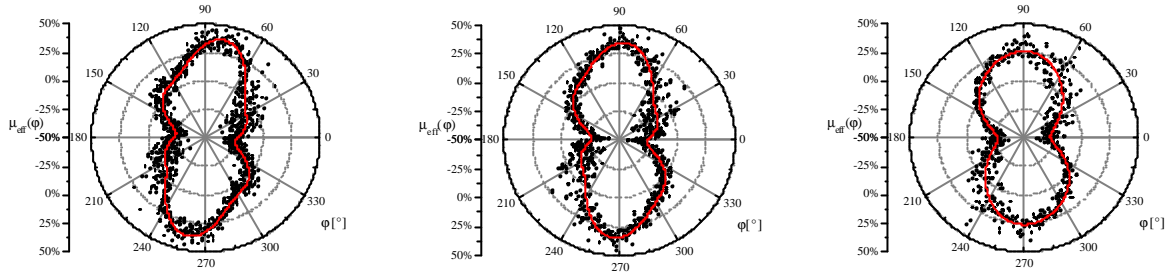


Figure III - 48 : Mobilisation du frottement ($N = 500$ - $q = 17^\circ, 22^\circ$ et 26° - $p = 0,1$).

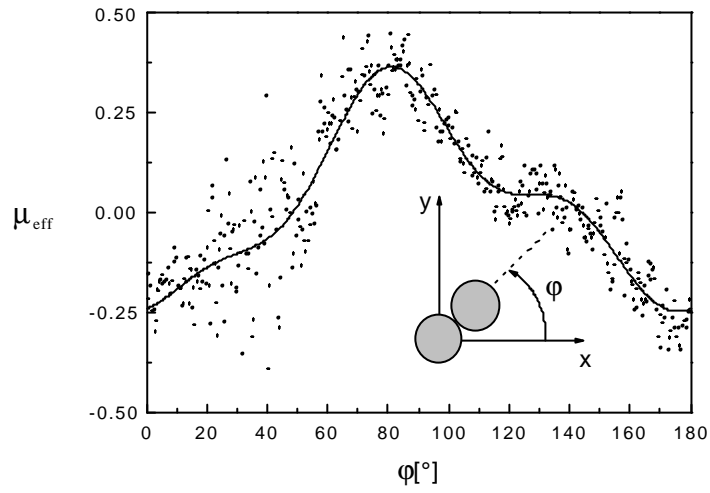


Figure III-49 : Anisotropie de la mobilisation du frottement
($N = 500$ - $q = 19^\circ$ - $p = 0$ - $m = 0,4$).

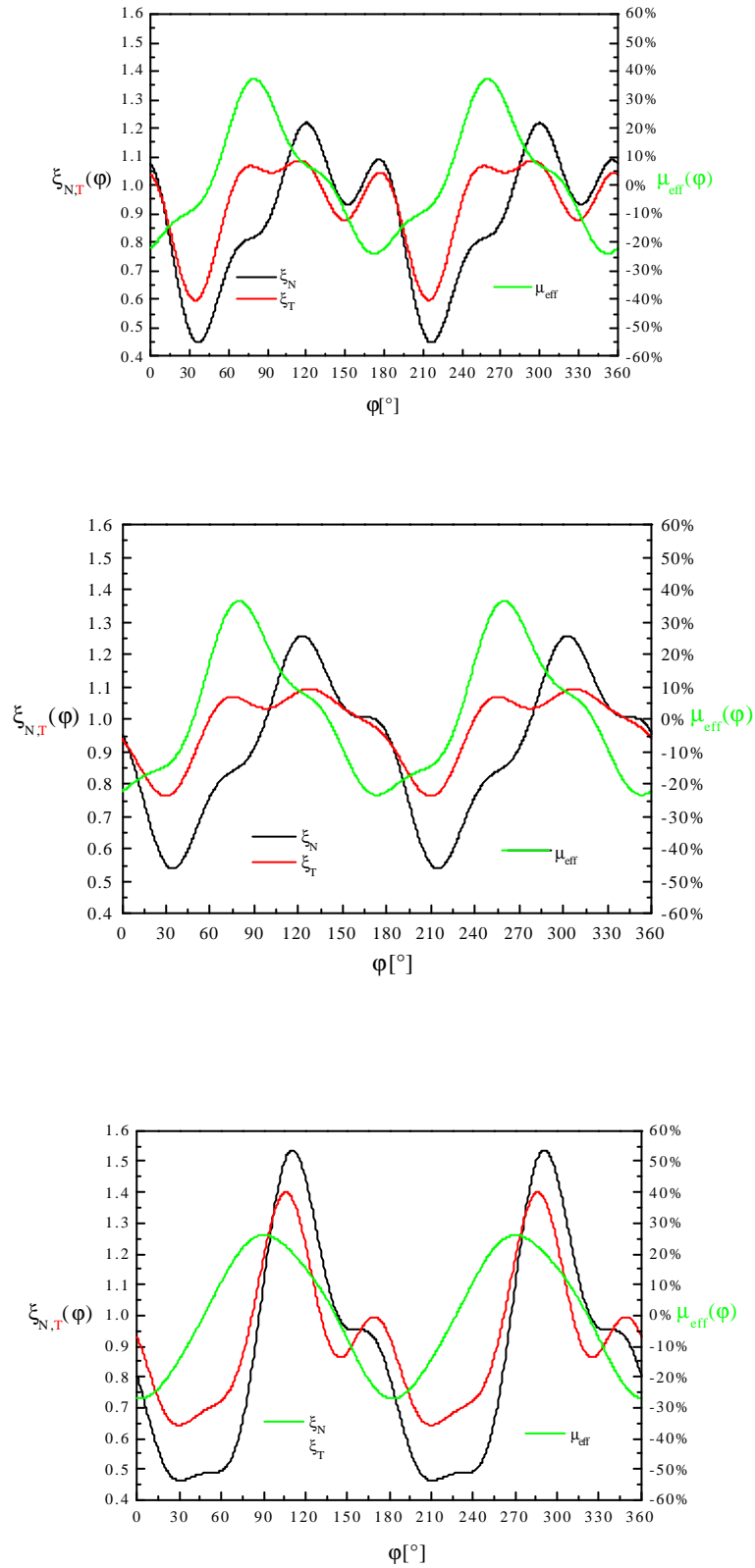


Figure III - 50 : Comparaison des distributions angulaires d'intensité des forces normales et tangentielle et de la mobilisation du frottement ($N = 500$, $p = 0,1$, $q = 17^\circ, 22^\circ$ et 26°).

V.C. Calcul du tenseur des contraintes

On rappelle en Annexe 6 un résultat établi par [Moreau96] concernant le tenseur des contraintes. Celui-ci est la somme de trois contributions :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^c + \underline{\underline{\Sigma}}^f + \underline{\underline{\Sigma}}^r \quad \text{[III.24]}$$

Le premier terme ("contact") est le terme usuel en statique, associé aux efforts de contact entre grains. Le deuxième terme ("fluctuations") est le tenseur de Reynolds usuel en mécanique des fluides, associé aux fluctuations de vitesse des grains. Le troisième terme ("rotation") est nouveau. Il est lié à la rotation propre des grains. Ainsi, pour une assemblée de N grains (masses m_i , moment d'inertie I_i , vitesse de rotation ω_i et fluctuations de vitesse $\delta\vec{v}_i$), occupant une surface S , entre lesquels s'exercent des forces de contact \vec{f}_c aux points \vec{r}_c , les trois termes ont les expressions suivantes :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^{N_i} \text{Sym}(\vec{f}_c \otimes \vec{r}_c) \quad \text{[III.25]}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^f = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N m_i \delta\vec{v}_i \otimes \delta\vec{v}_i \quad \text{[III.26]}$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^r = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \underline{\underline{\text{Id}}} \quad \text{[III.27]}$$

On doit noter en particulier que ce tenseur est symétrique. En utilisant la technique de prise de moyenne décrite en Annexe 5, on calcule alors le profil des composantes du tenseur des contraintes au sein de l'écoulement. Les contraintes sont systématiquement normalisées par $\rho_p g d$.

Nous commençons par tracer (figure III-51) le profil des composantes du tenseur des contraintes total. Une telle mesure directe a été faite sur plan incliné par [Silbert01] (sans le terme de rotation) et en cellule de cisaillement par [Lätzel00] (restreinte au terme de contact).

Pour deux des composantes, une comparaison de ce calcul direct (à partir des percussions de contact) avec la conservation de la quantité de mouvement est possible. Le calcul est fait à partir des équations (I.20), ce qui donne :

$$\begin{cases} \Sigma_{yy}(y) = \int_y^\infty v(t) dt \\ \Sigma_{xy}(y) = \sin \theta \Sigma_{xx}(y) \end{cases} \quad [\text{III.28}]$$

La compacité étant à peu près constante, ces termes s'approximent assez bien par :

$$\begin{cases} \Sigma_{yy}(y) = v (H - y) \\ \Sigma_{xy}(y) = \theta v (H - y) \end{cases} \quad [\text{III.29}]$$

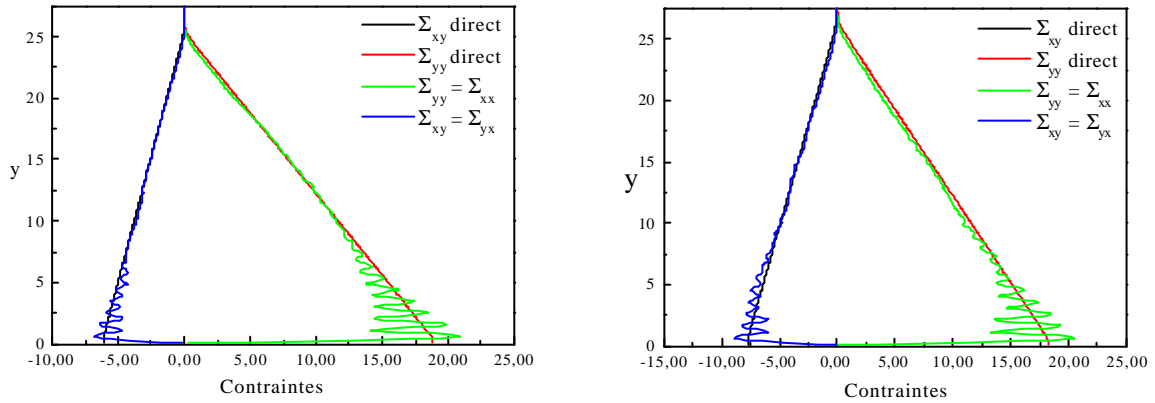


Figure III - 51 : Profil des composantes du tenseur des contraintes total. Comparaison avec la conservation de la quantité de mouvement (a: $N = 1000$ - $p = 0.15$ - $q = 18^\circ$, et b: $N = 1000$ - $p = 0.15$ - $q = 23^\circ$).

L'accord entre le calcul direct et la prédiction de la conservation de la quantité de mouvement est excellent. On observe des oscillations importantes près du socle, associées à la structuration en couches.

Par contre, la troisième composante (Σ_{xx}) n'est pas fournie par la conservation de la quantité de mouvement, mais est liée à la loi de comportement du matériau. Le calcul direct mesure la composante Σ_{xx} et l'on observe de manière systématique l'égalité des deux composantes normales (figure III-52), c'est à dire l'isotropie de la pression :

$$\Sigma_{xx} \approx \Sigma_{yy} \quad [\text{III.30}]$$

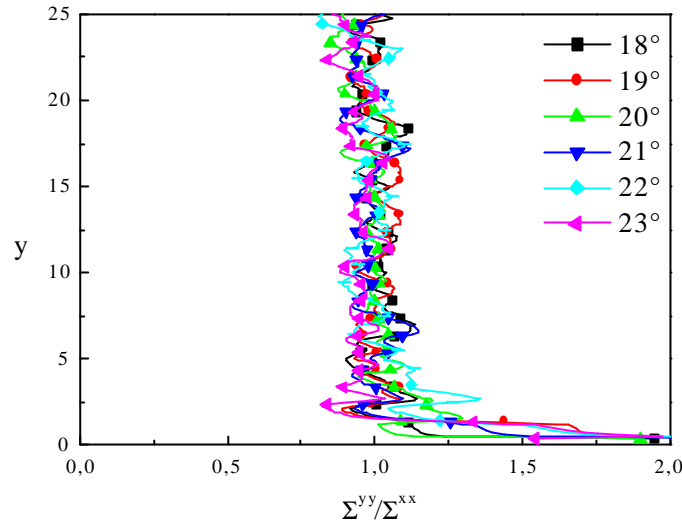


Figure III - 52 : Rapport des contraintes normales ($N = 1000$ - $p = 0,15$ - $q = 20^\circ$).

Cette dernière information (aussi observée par [Lätzel00, Silbert01]) est précieuse pour les modélisations de type Saint-Venant d'écoulements non-uniformes (front, étalement) que nous avons évoquées au Chapitre II § III.E [Pouliquen99a, 99b et 02b]. Cette fois-ci, du fait de la courbure de la surface libre, le frottement effectif du matériau sur le socle $\mu^*(H, V)$ n'est pas simplement équilibré par la gravité. Il faut en plus prendre en compte un terme de gradient de la pression Σ_{xx} . En faisant l'hypothèse que la pression Σ_{xx} est proportionnelle à la pression Σ_{yy} ($\Sigma_{xx} = K \Sigma_{yy}$), on obtient pour un écoulement à compacité constante (comme c'est le cas pour ces écoulements denses) :

$$\mu^*(H, V) - \tan \theta = K \frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{[III.31]}$$

La connaissance de K est donc cruciale pour prévoir comment s'étale une masse granulaire. Deux hypothèses ont ainsi été testées par [Pouliquen99b] : $K = 1$ ou bien la valeur donnée par Rankine en mécanique des sols (coefficient de poussée des terres). Il apparaît que la valeur $K = 1$ est en meilleur accord avec les résultats expérimentaux.

Nous discutons maintenant l'importance relative des différents termes. La figure III-53 montre le poids croissant des contributions associées aux fluctuations de vitesse et à la rotation lorsque l'inclinaison augmente, c'est-à-dire que le système se dilue. Les composantes

du tenseur de rotation sont négligeables (inférieures à 1%) devant celles du tenseur des contraintes totales, sauf dans les dernières couches près de la surface libre, et sur la toute première couche près du socle. De même, les composantes du tenseur de Reynolds (fluctuations de vitesses) peuvent atteindre 3%, mais restent encore négligeable.

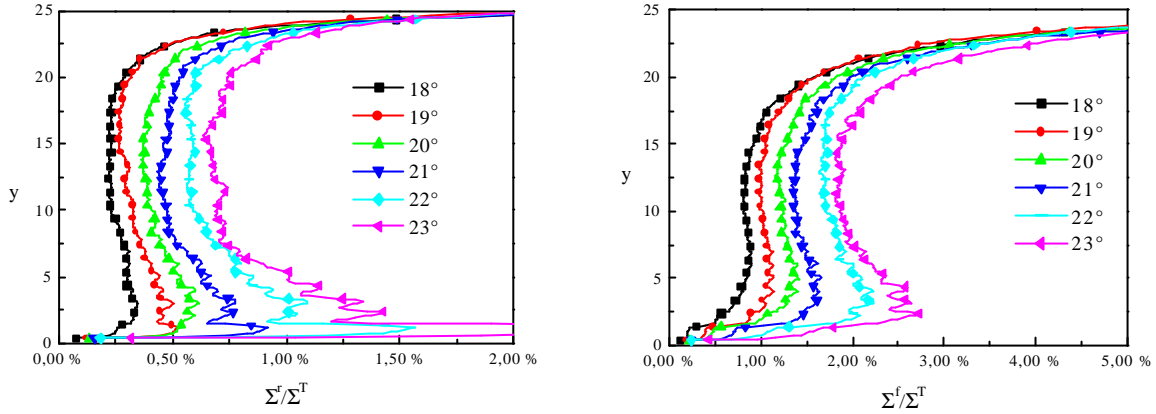


Figure III - 53 : Parties normales des tenseurs de rotation et de Reynolds ($N = 1000$ - $p = 0,15$).

Il est possible de faire une estimation a priori des composantes de rotation et de fluctuation, compte-tenu des mesures qui ont été faites concernant la vitesse de rotation et la vitesse de translation. En effet :

$$\begin{cases} \Sigma^f = v \langle \delta v^2 \rangle \\ \Sigma^r \approx \frac{1}{16} v \langle \omega^2 \rangle \end{cases} \quad [\text{III.32}]$$

Mais on a observé que (§ IVA.3 et § IV.B.2 de ce chapitre):

$$\begin{cases} \langle \delta v^2 \rangle = \alpha \dot{\gamma} \\ \langle \omega \rangle = \frac{\dot{\gamma}}{2} \text{ et } \langle \delta \omega^2 \rangle \approx \beta \dot{\gamma}^\varepsilon \end{cases} \quad [\text{III.33}]$$

avec $\alpha \approx 0,3$ $\beta \approx 5$ et $\varepsilon \approx 1,44$. Les fluctuations de rotation dominant. En conséquence :

$$\begin{cases} \Sigma^f \approx \alpha v \dot{\gamma} \\ \Sigma^r \approx \frac{\beta}{16} v \dot{\gamma}^\varepsilon \end{cases} \quad [\text{III.34}]$$

Pour cette estimation, nous nous contenterons d'utiliser l'expression suivante du taux de cisaillement :

$$\dot{\gamma}(y) = \frac{\dot{\gamma}(0)}{1 + y/b} \quad [\text{III.35}]$$

Connaissant l'expression de la contrainte totale (équation (III-29)), on dispose finalement d'une estimation des rapports des contributions :

$$\begin{cases} \frac{\Sigma^f}{\Sigma^t} \approx \frac{\alpha \dot{\gamma}(0)}{(1 + y/b)(H - y)} \\ \frac{\Sigma^r}{\Sigma^t} \approx \frac{\beta}{16(1 + y/b)^\epsilon (H - y)} \end{cases} \quad [\text{III.36}]$$

que l'on a tracé sur la figure (III-54). On retrouve la forme l'ordre de grandeur des courbes de la figure III-53.

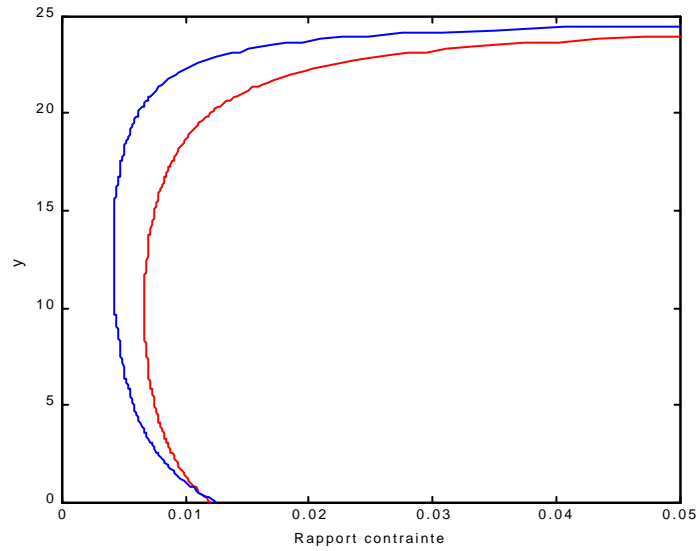


Figure III-54 : Prédiction des contributions associées aux fluctuations de vitesse dans le tenseur des contraintes

($\dot{\gamma}(0) = 1$, $b = 5$, $H = 25$). En rouge, le rapport $\frac{\Sigma^f}{\Sigma^t}$, en bleu le rapport $\frac{\Sigma^r}{\Sigma^t}$

VI. Écoulements de polygones

Afin d'étudier l'influence de la forme des grains sur les caractéristiques de l'écoulement et de se rapprocher de situations réelles (par exemple, un éboulement rocheux), nous avons abordé l'étude d'écoulements de grains polygonaux sur un plan incliné, en géométrie bidimensionnelle. Cette étude préliminaire a été menée à la fois sur le plan expérimental et numérique, ce qui a conduit à l'adaptation d'outils d'imagerie (voir Annexe 3 et [Moucheron00]) et de simulation numérique (voir Annexe 4 et [Albertelli99]). On résume ici les principaux résultats. Pour plus de détail, on consultera [Moucheron00, Paris00].

VI.A. Etude expérimentale

Nous avons utilisé le dispositif expérimental mis au point par [Azanza98] (voir Annexe 3). Il s'agit d'un plan incliné bidimensionnel, alimenté par un réservoir à débit contrôlé. Les particules s'écoulent ensuite sur un fond lisse d'environ 60 cm de long avant de rencontrer un fond rugueux. La rugosité est composée de demi-cylindres jointifs en acier de 1,5 mm de diamètre. Les billes sont ici remplacées par des pentagones en aluminium à bords plats réguliers d'environ 5 mm de diamètre et 2 mm d'épaisseur (Figure III-55).

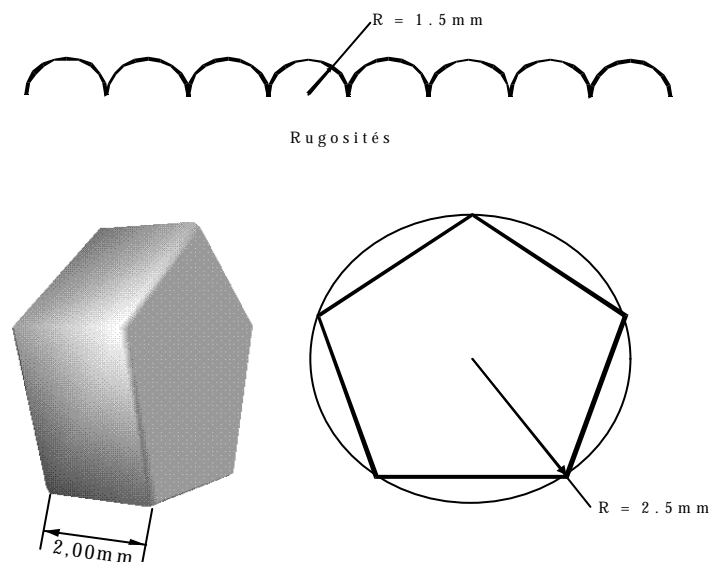


Figure III - 55: Schéma de la rugosité et du pentagone modèle.

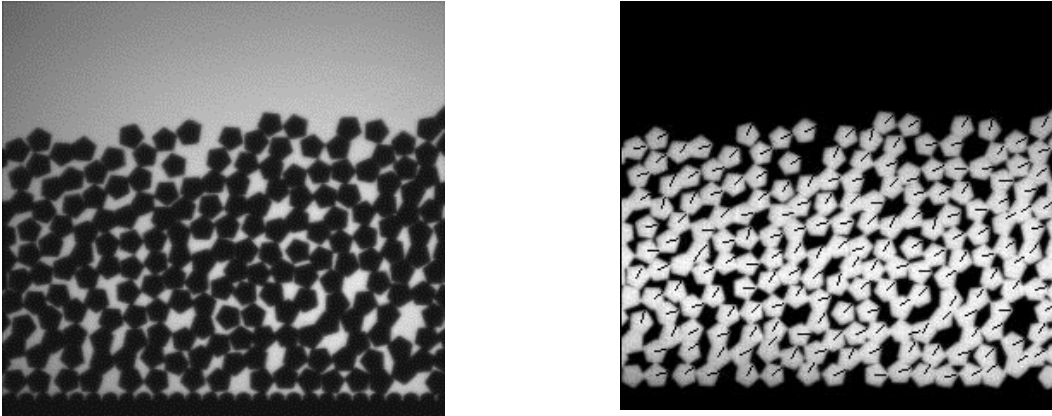


Figure III - 56 : Image d'un écoulement à 31° (gauche) - Image fournie par le programme de traitement des données pour la détection des sommets et de la rotation (droite).

Par traitement d'images, nous opérons une détection des centres des pentagones ainsi que de leurs sommets (information utile pour connaître la rotation) (figure III-56). Par moyennage, on mesure ainsi les grandeurs cinématiques (vitesses de translation et de rotation) et structurales (compacité).

On a d'abord déterminé la plage angulaire entre l'arrêt (29°) et l'accélération de l'écoulement (35°). Dans cette plage, l'analyse des grandeurs telles que l'énergie cinétique, le nombre moyen de particules par image ou bien encore l'évolution du débit au cours du temps, permet de déterminer si un écoulement est stationnaire ou non (figure III-57). En effet, si l'énergie cinétique par particule est constante pendant que le débit diminue, nous ne sommes pas en régime stationnaire. Ainsi, une fois la plage temporelle de stationnarité déterminée, on peut calculer les profils de vitesse et de compacité. A la différence des billes, les écoulements de pentagones sont assez fluctuants : le flux de particules a tendance à s'arrêter, puis à redémarrer, puis de nouveau à s'arrêter, etc... Ce phénomène peut être expliqué par la formation de contacts stables (face-face) entre deux, voire une colonne, de pentagones, ce qui tend à bloquer l'écoulement. Nous avons choisi de n'explicitier, à titre d'exemple, que les résultats issus de l'écoulement à 31° , qui reste sensiblement stationnaire. Pour les autres inclinaisons, soit le débit varie au cours du temps, soit l'épaisseur est assez faible (environ 6 à 8 grains).

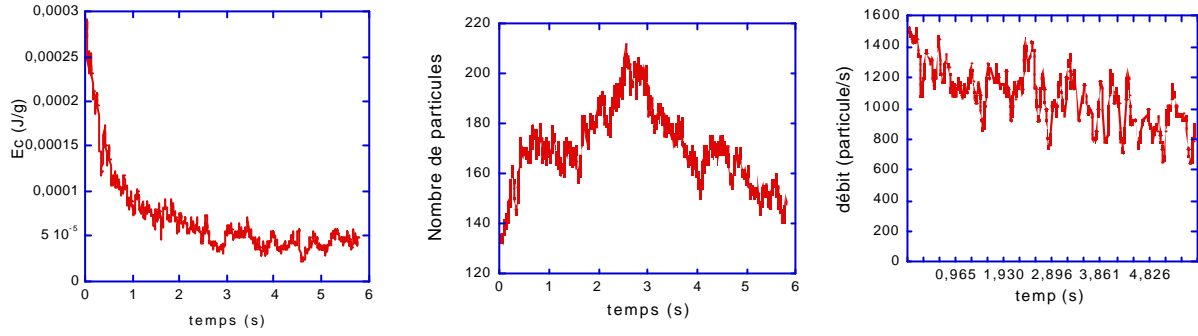


Figure III-57 : Evolutions respectives de l'énergie cinétique par particule, du nombre moyen de particules par image et du débit ($q = 31^\circ$).

La figure III-58 montre un exemple de profils de compacité et de vitesse. L'écoulement a une hauteur d'environ 14 particules et est structuré dans les premières couches proches du socle. On peut penser que dans les couches supérieures, plus diluées, l'écoulement est plutôt collisionnel. Toute la couche est cisailée. La concavité du profil de vitesse est différente de celle qui est mesurée avec des disques ou des sphères.

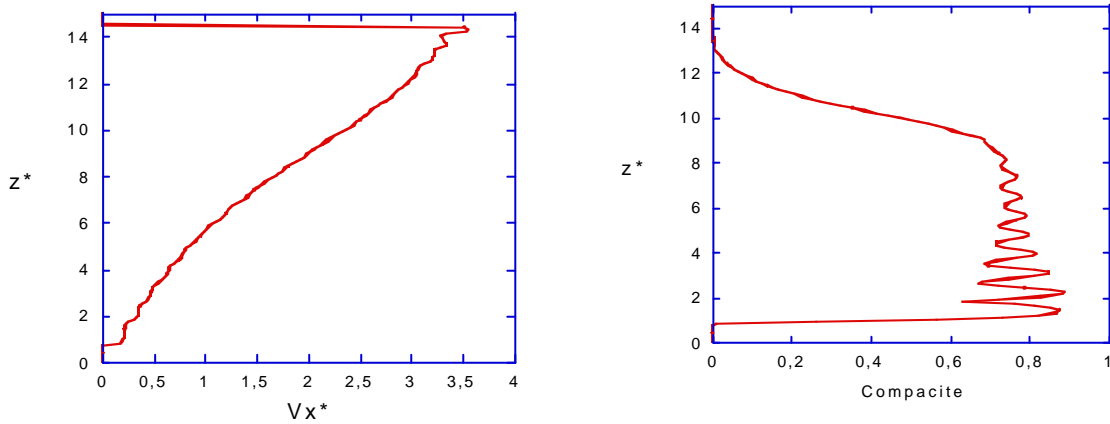


Figure III - 58 : Profils de vitesse et de compacité pour $q = 31^\circ$.

VI.B. Simulations numériques

Nous avons également réalisé des simulations d'écoulement bidimensionnels d'une assemblée de polygones irréguliers ayant 5 à 8 sommets sur un plan incliné rugueux (figure III-59). Pour cela nous avons adapté un programme de dynamique des contacts, mis à disposition par Jean-Jacques Moreau.

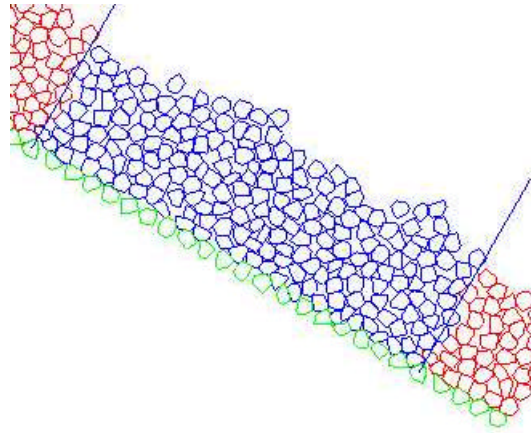


Figure III-59 : Illustration de la simulation d'un écoulement d'une assemblée de grains polygonaux

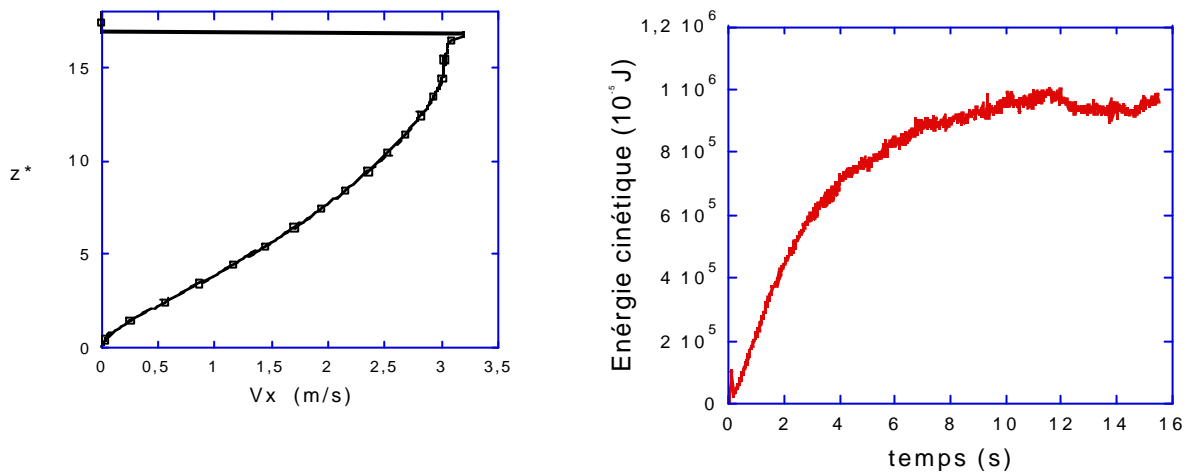


Figure III-60: Profil de vitesse et évolution de l'énergie cinétique pour la simulation d'un écoulement à 33°.

Comme pour les disques, nous nous sommes placés dans la plage d'écoulement stationnaire, déterminée à partir de la courbe montrant l'évolution de l'énergie cinétique totale. On a alors mesuré le profil de vitesse moyen (figure III-60). On retrouve les bons ordres de grandeur, avec une concavité différente de celle des billes, près du socle (comme observé expérimentalement).

Cependant, faute de temps, cette étude est restée préliminaire et qualitative. L'étude expérimentale des écoulements de polygones s'est révélée plus délicate que prévu, du fait du caractère intermittent de l'écoulement. Il faudrait, par conséquent, changer le mode d'alimentation de la trémie ou bien la forme de la rugosité. Les simulations numériques nécessiteraient quant à elle de faire varier des paramètres comme le coefficient de frottement et l'angle d'inclinaison, afin de permettre une comparaison directe entre l'expérience et la simulation.

VII. Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous pouvons dresser quelques conclusions sur ces écoulements denses de grains parfaitement inélastiques ($e = 0$). Nous avons mis en évidence une plage d'écoulements stationnaires et uniformes limitée par une courbe $H_{\text{stop}}(\theta)$. Ces écoulements présentent un profil de compacité constante, mais la compacité moyenne décroît avec l'inclinaison. Le profil de vitesse montre que l'analyse de Bagnold convient dans la région centrale de l'écoulement. Une déviation est observée à la fois dans la zone structurée près du socle (une dizaine de couches), et dans la zone superficielle. La vitesse de rotation moyenne est égale au demi-gradient de vitesse. On confirme la loi d'échelle pour la vitesse moyenne mise en évidence par Pouliquen. On met en évidence des lois d'échelle entre fluctuations de vitesse de translation et de rotation et taux de cisaillement. L'étude du réseau de contact met en évidence des anisotropies importantes et une statistique large des forces, analogue aux situations quastatistiques. On observe une réduction notable du coefficient de frottement effectif. Enfin, le tenseur des contraintes se restreint essentiellement à la contribution associée aux forces de contact, et l'on observe que la pression est isotrope. Notons qu'un certain nombre de ces résultats ont été confirmés par une étude en dynamique moléculaire [Bennis01], ce qui indiquerait que ces résultats sont peu sensibles au modèle de contact et ont plutôt une origine géométrique. La polydispersité a une influence quantitative notable sur la vitesse. L'influence des caractéristiques mécaniques des grains n'a pas été étudiée ici. [Silbert01] a montré que le coefficient de frottement (entre 0,15 et 1) a une influence sur la vitesse mais non sur la compacité et que le coefficient de restitution (entre 0,6 et 0,98) n'a pas d'effet en 3D et un effet faible en 2D. Ces mêmes travaux indiquent par ailleurs une influence notable de la rugosité, aspect que nous n'avons pas du tout étudié ici. Rappelons toutefois la structuration du milieu près du socle, et le fait que la plupart des grandeurs étudiées ont un comportement singulier sur les toutes premières couches.

L'ensemble de ces observations constituera la base de notre discussion des modèles au chapitre V.

CHAPITRE IV

ÉCOULEMENTS EN CONDUITE VERTICALE

CHAPITRE IV

ÉCOULEMENTS EN CONDUITE VERTICALE

Après le plan incliné, la conduite verticale est une deuxième géométrie simple pour étudier l'écoulement dense de milieux granulaires. Nous avons cette fois-ci privilégié l'étude expérimentale, que nous allons présenter dans la suite.

En utilisant le dispositif et les moyens d'imagerie mis au point au laboratoire pour l'étude des écoulements sur plan incliné [Azanza98], nous avons commencé par une série d'expériences dans une conduite bidimensionnelle (§ I), dans laquelle l'écoulement est confiné sur une monocouche entre deux parois verticales transparentes. Il est alors possible de mesurer par imagerie rapide les positions et vitesses de l'ensemble des grains, et ainsi d'obtenir une information détaillée sur la structure et la cinématique du milieu.

On s'est ensuite orienté vers des conduites tridimensionnelles, pour lesquelles des mesures sont possibles aux parois (§ II), mais beaucoup plus délicates à l'intérieur même de l'écoulement, sinon par des méthodes physiques spécifiques. L'arrivée au laboratoire d'un imageur par résonance magnétique nucléaire (IRM), appareil susceptible de mesurer des profils de vitesse à l'intérieur d'un écoulement, nous a conduit à concevoir l'expérience décrite au § III. Le principe en est extrêmement simple, mais il faut noter qu'elle constitue à la fois la première mesure non invasive du champ de vitesse dans un écoulement granulaire en conduite verticale, et pour le laboratoire la première expérience de vélocimétrie RMN.

De façon générale, la géométrie d'étude est précisée sur la figure IV-1. Le matériau granulaire s'écoule dans la direction verticale z dans une conduite de largeur ou diamètre L (mesuré sans la rugosité), à parois rugueuses. Le débit est contrôlé par l'ouverture en aval. La direction horizontale est notée x ou r . L'origine dans cette direction est soit le centre de la conduite, soit la position du centre de la particule la plus proche de la rugosité (figure IV-2). Les grandeurs seront souvent normalisées par la taille d des grains.

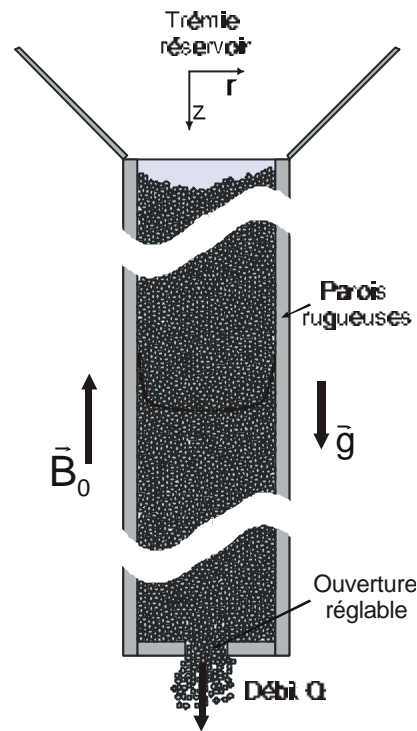


Figure IV - 1 : Ecoulement en conduite verticale.

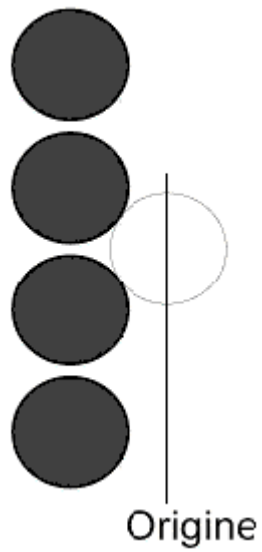


Figure IV - 2 : Choix de l'origine lors de l'étude des zones de cisaillement.

I. Géométrie bidimensionnelle

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus dans le cadre du stage de Virginie Leroy, et l'on renvoie à son rapport de stage pour plus de détail [Leroy98].

I.A. Dispositif expérimental

On a indiqué au Chap I § II.B l'intérêt de la géométrie bidimensionnelle pour l'étude expérimentale des écoulements granulaires. La conduite est constituée de deux plaques de verre de 2 m de hauteur, 20 cm de largeur et 1 cm d'épaisseur. L'écartement est ajusté à l'aide de cales de précision à la taille des grains en écoulement (épaisseur des grains + 0,1 mm). Une telle configuration préserve le caractère bidimensionnel de l'écoulement et permet d'éviter tout blocage. Les grains s'écoulent entre deux barres d'acier distantes de L , dans lesquelles une rugosité constituée de demi-cylindres jointifs de diamètre 3 mm a été découpée au laser (voir figure IV-3). Le débit est contrôlé par une ouverture de largeur D , au centre d'un fond plat. On fait varier L entre 15 et 30 d , et D entre 8 et 15 d (pour une ouverture inférieure à 5 d , on observe un blocage de l'écoulement lié à la formation de voûtes au niveau de l'orifice de sortie). Les expériences sont menées avec des billes d'aluminium ou d'acier de diamètre $d = 3$ mm, et avec des pentagones réguliers d'acier, d'épaisseur 2 mm et de diagonale de longueur 5 mm, afin de vérifier que les phénomènes observés avec des sphères ne sont pas liés à l'organisation quasi-cristalline, les pentagones ne formant pas de réseau structuré. Ils permettent en outre de visualiser d'éventuelles rotations des particules. Il est à noter que pour quelques expériences, la géométrie du fond a été modifiée : le canal est alors prolongé par une trémie de demi-angle au sommet $\beta = 30^\circ$ ou 45° . Par ailleurs, comme dans l'expérience de [Pouliquen96a], on peut incliner l'ensemble du dispositif d'un angle θ par rapport à la verticale. Cependant la majorité des expériences correspond à $\theta = 0^\circ$, comme cela est représenté sur la figure IV-3.

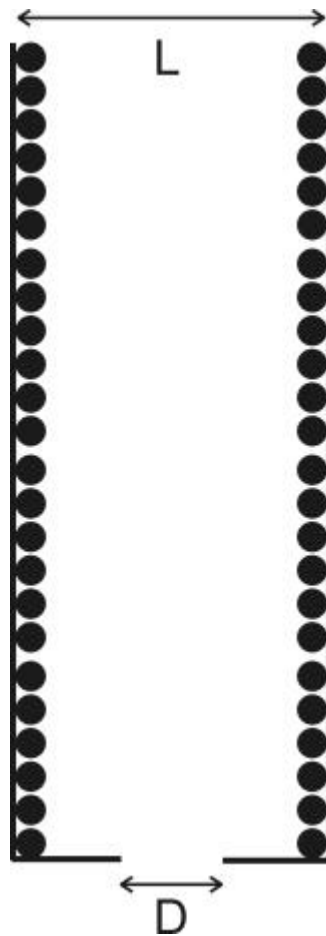


Figure IV - 3 : Conduite bidimensionnelle.

Les expériences consistent à remplir la conduite de particules, l'orifice étant initialement fermé par une languette, à ouvrir rapidement la trappe et à observer l'écoulement par imagerie rapide (voir Annexe 3). La figure IV-4 montre une image d'écoulements de billes d'aluminium et de pentagones.

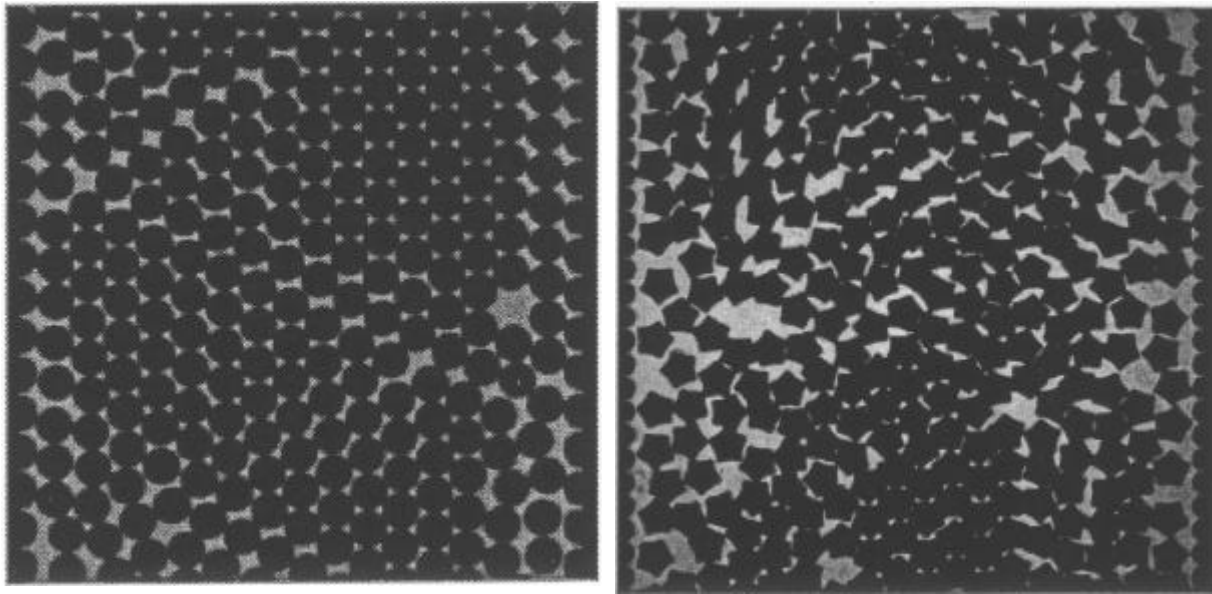


Figure IV - 4 : Image de l'écoulement en conduite verticale 2D ($L = 15$, $D = 10$)

Billes d'aluminium et pentagones.

I.B. Résultats

Nous avons commencé par mesurer les profils moyens de compacité et de vitesse (figure IV-5). Ceux-ci mettent en évidence une localisation du cisaillement près des parois, les grains s'écoulant "en bloc" dans la région centrale. Il existe aussi une légère dilatation du milieu granulaire dans cette zone de cisaillement. La largeur de la zone de cisaillement est de quelques tailles de grains. On note sur la figure IV-5 une légère influence de la nature des particules sur la forme des profils.

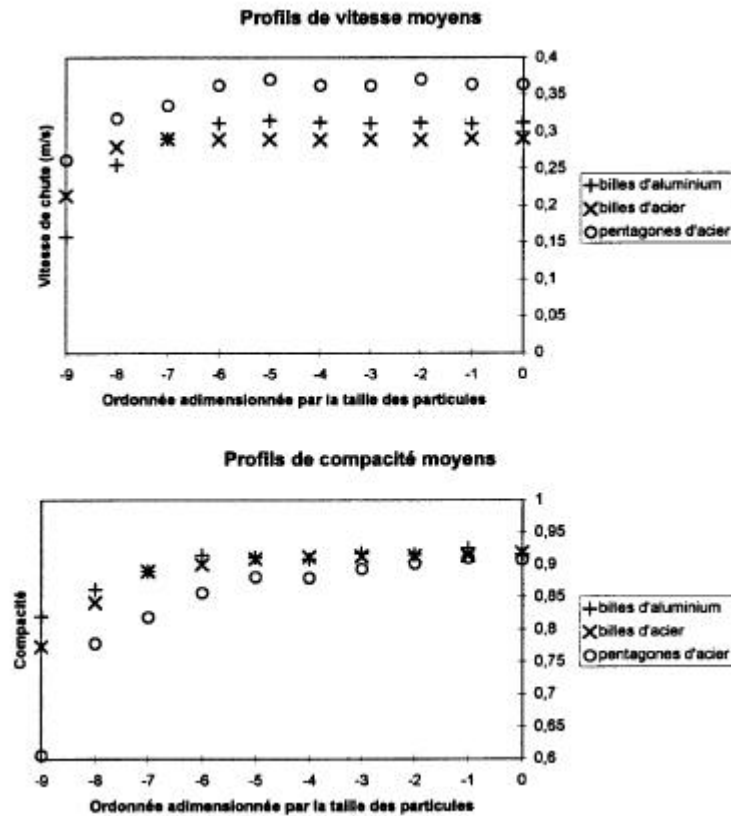


Figure IV-5 : Profils de compacité et vitesse ($L = 20$, $D = 12$).

Comme cela a été mis en évidence par [Pouliquen96a], il est possible d'augmenter la taille des zones de cisaillement et de dilatance en inclinant le canal d'écoulement. Les profils moyens de vitesse et de compacité deviennent alors asymétriques et la zone de cisaillement est plus épaisse sur la paroi inférieure (cf. figure IV-6). Notons aussi que la forme de la trémie a une influence notable sur le débit. Les profils de vitesse de la figure IV-7 montrent que l'écoulement le plus rapide est obtenu avec une trémie à 30° et le plus lent avec un silo à fond plat.

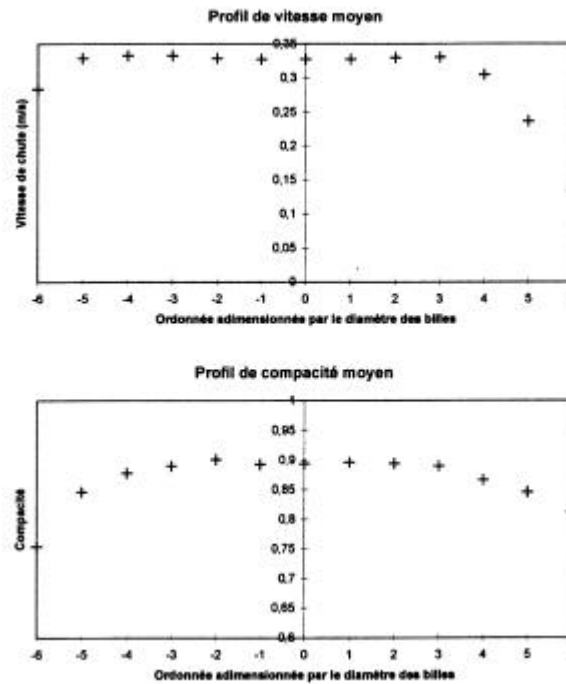
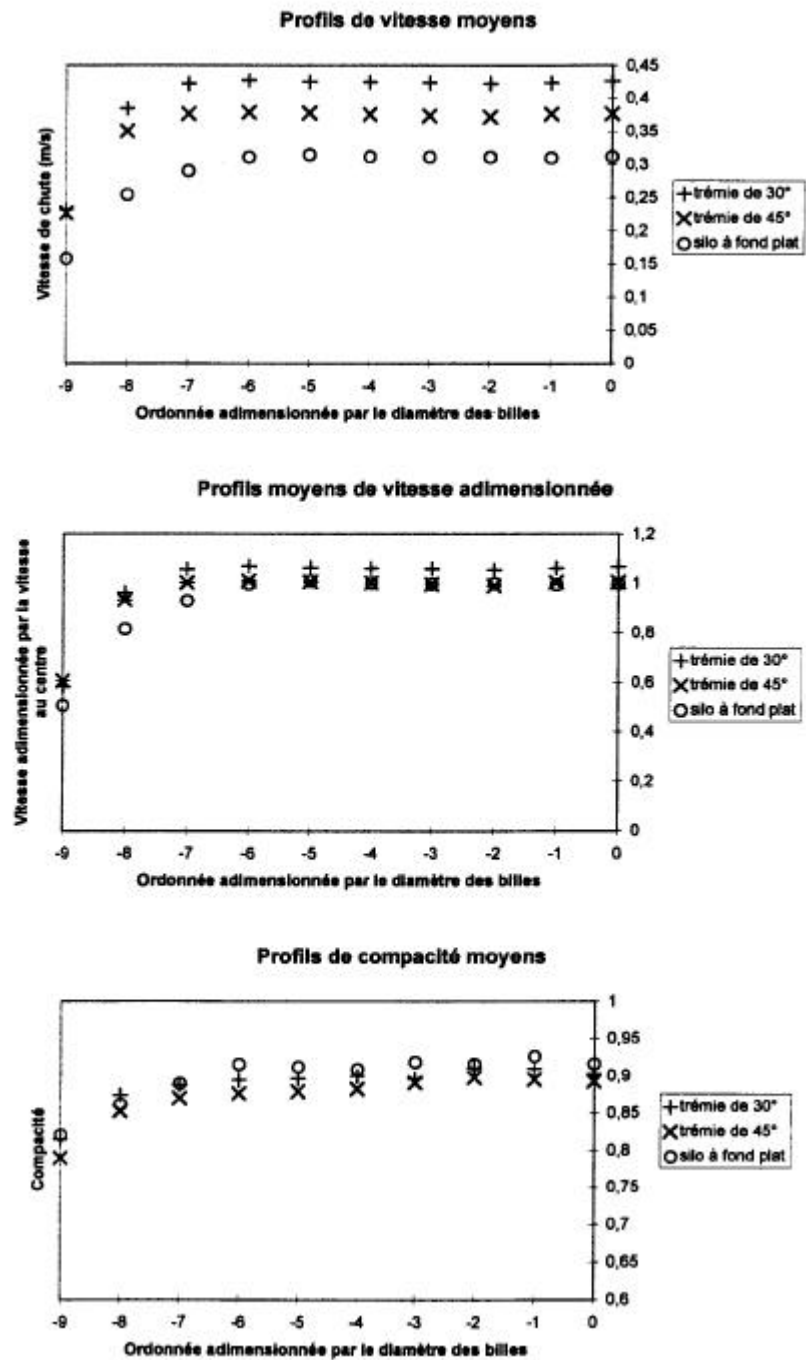


Figure IV-6 : Influence de l'inclinaison de la conduite ($q = 30^\circ$, $L = 15$, $D = 10$).

En outre l'observation des variations du débit au cours du temps ou encore des trajectoires (figure IV-8) montre que ces écoulements sont systématiquement instationnaires. Les particules sont soumises, en bloc, à des accélérations suivies de brutales décélérations. Ce phénomène d'instationnarité ne semble lié ni à la méthode de remplissage, ni à la monodispersité du milieu granulaire modèle, ni à la géométrie du fond du canal, ni à la nature des particules. Il apparaît pour toutes les valeurs de L et D balayées. Mais il paraît sensible à l'inclinaison θ du dispositif. On constate une diminution de l'écart-type de la distribution de vitesse quand θ augmente. Le phénomène apparaît amplifié pour les écoulements lents. La figure IV-9 représente l'évolution de la vitesse moyenne mesurée dans une bande parallèle à la paroi, située dans la région d'écoulement en bloc, pour un écoulement de pentagones avec $L = 20$ et $D = 8$. La transformée de Fourier ne fait pas apparaître de temps caractéristique. La figure met en évidence des phases de durée notable où l'accélération est légèrement inférieure à la pesanteur, suivies de phase de décélérations brutales. On peut interpréter le mouvement des particules comme une succession de phases de chute quasi-libre suivies de chocs les freinant brutalement.


 Figure IV -7: Influence de l'orifice de vidange ($L = 20$, $D = 10$).

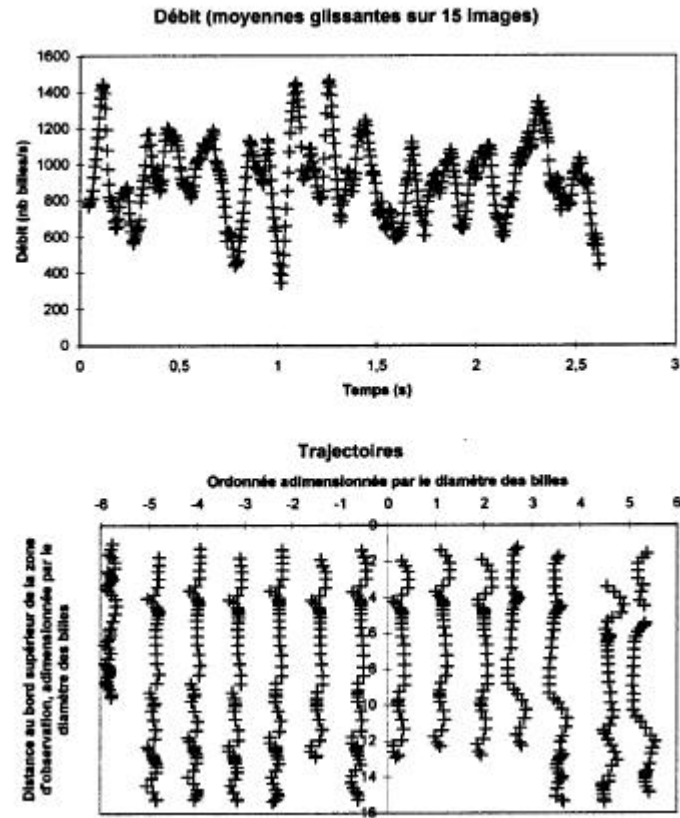
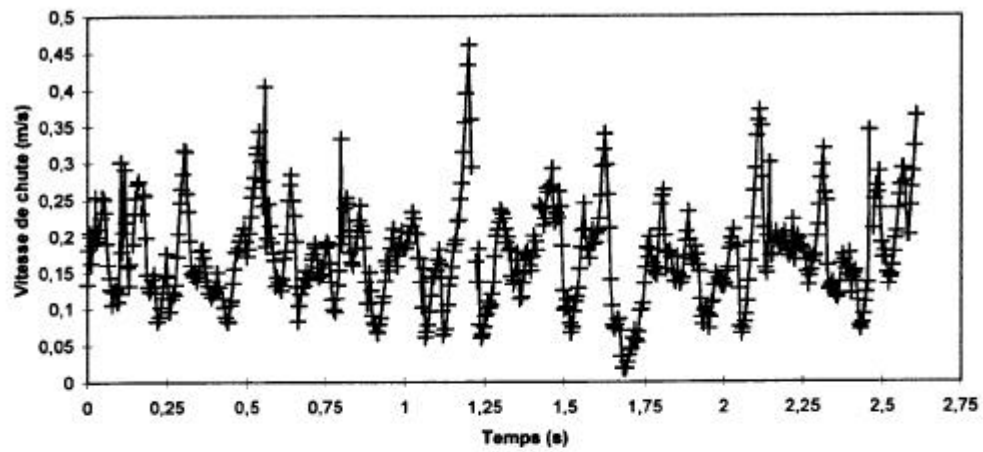
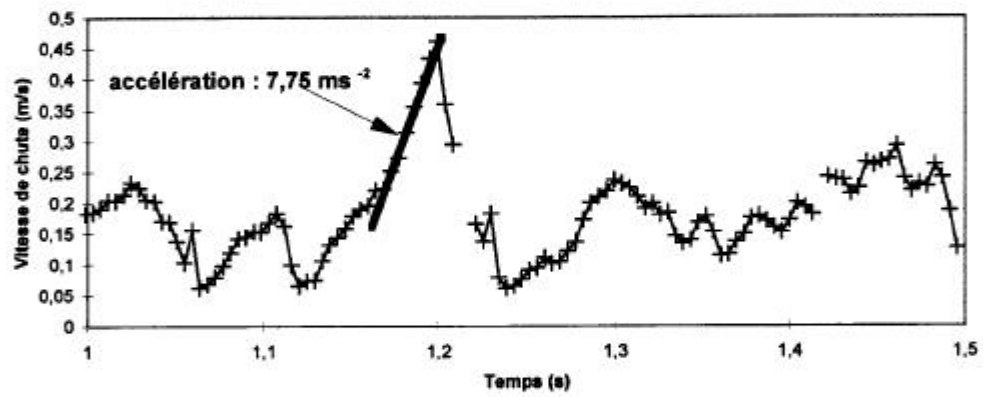


Figure IV-8 : Evolution du débit et trajectoires des particules (pentagones, $L = 15$, $D = 8$).



Zoom n°1



Zoom n°2

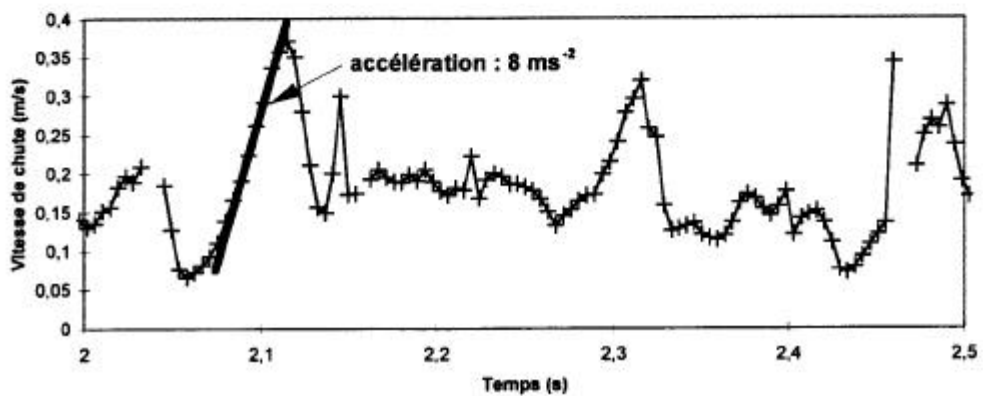


Figure IV - 9 : Variation de la vitesse moyenne d'écoulement.(pentagones, $L = 20$, $D = 8$)

I.C. Simulations numériques

On a simulé l'écoulement de grains secs en conduite verticale bidimensionnelle par la méthode de dynamique des contacts (voir figure IV-10). On fait s'écouler $N = 4500$ disques polydisperses ($p = 0,15$) de taille moyenne d dans une conduite à parois rugueuse. La rugosité est constituée de disques jointifs identiques de taille Rd (on considère trois rugosités $R = 0,5 - 1$ et 4). Le coefficient de restitution entre grains en écoulement ou avec les grains de la paroi vaut zéro. Le coefficient de frottement entre grains en écoulement ou avec les grains de la paroi vaut $0,4$. La largeur de la conduite est $L = 45 d$. Le débit est contrôlé par l'ouverture en aval qui vaut $D = 15 d$. Les grains qui sortent de l'ouverture en aval sont réinjectés en amont. Compte-tenu du nombre de grains, la longueur verticale du système est de l'ordre de $100d$. Il s'établit un écoulement stationnaire et uniforme au centre de la conduite, et c'est dans cette zone centrale que l'on mesure les différents profils (compacité, vitesse, température) selon la même procédure que pour les écoulements sur plan incliné. Le zéro est choisi ici au centre des grains fixés à la paroi.

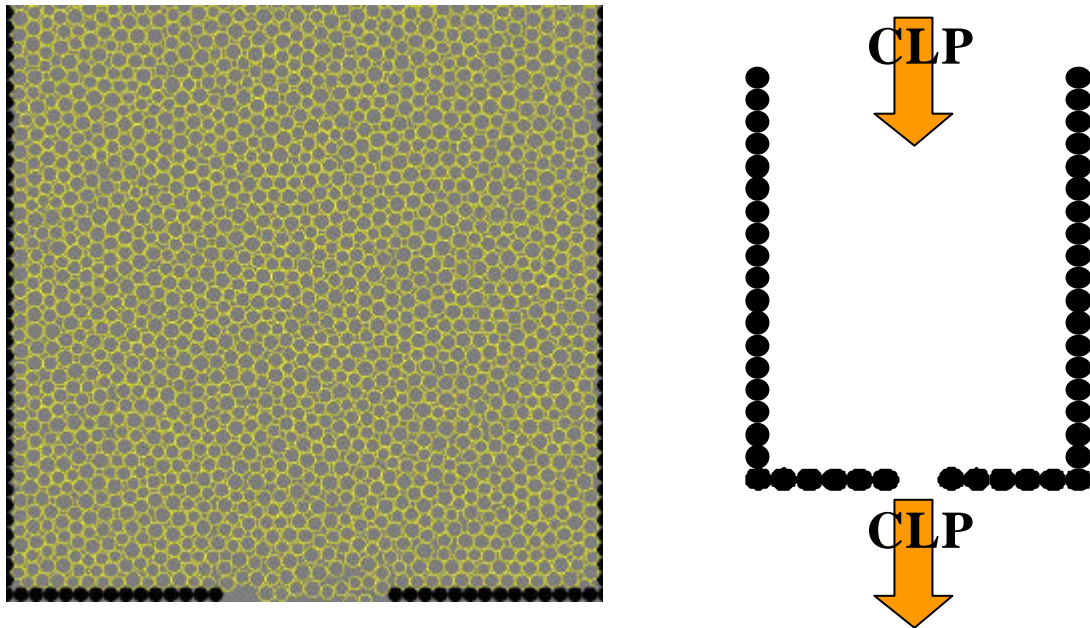


Figure IV - 10 : Schéma du système simulé - Orifice de sortie (à gauche) – Illustration des conditions aux limites périodiques (à droite).

La figure IV-11 montrent les profils de vitesse et température pour les trois rugosités. Le profil de compacité n'est montré que pour $R = 1$. La vitesse est normalisée par la vitesse maximale au centre de la conduite. La vitesse est normalisée par la vitesse maximale. La

température est normalisée par la température moyenne (en unité $(gd)^{1/2}$, elles valent 0,038 - 0,045 et 0,093 pour $R = 0,5 - 1$ et 4 respectivement).

Le profil de compacité montre qu'il s'agit d'écoulements très denses : la compacité au centre de la conduite est supérieure à 0,8. Le milieu est structuré sur une dizaine de couches près de la paroi. Il s'agit d'écoulements bouchons. Le cisaillement est localisé sur une dizaine de couches. Il y a peu de différences sur les profils de vitesse pour $R = 1$ et 0,5, hormis une vitesse de glissement plus importante pour $R = 0,5$, ce qui correspond à une paroi plus lisse. Par contre pour $R = 4$, les grains les plus proches de la paroi sont piégés, et la vitesse de glissement est nulle. Le cisaillement s'étend alors sur une zone un peu plus grande. Les fluctuations de vitesse sont du même ordre de grandeur, et faibles devant la vitesse de cisaillement moyenne. Elles sont d'autant plus importante que la rugosité est plus importante. Le profil a la même allure générale pour les trois rugosités, à savoir une température plus importante près de la paroi (paroi chaude) et une décroissance vers le centre de la conduite, en conservant cependant une valeur significative. Dans le cas $R = 4$, on observe cependant que le milieu est plus "froid" au voisinage de la paroi, là où les grains sont piégés. Le maximum de température intervient à une distance de l'ordre de cinq grains, c'est à dire à l'intérieur de la zone de cisaillement.

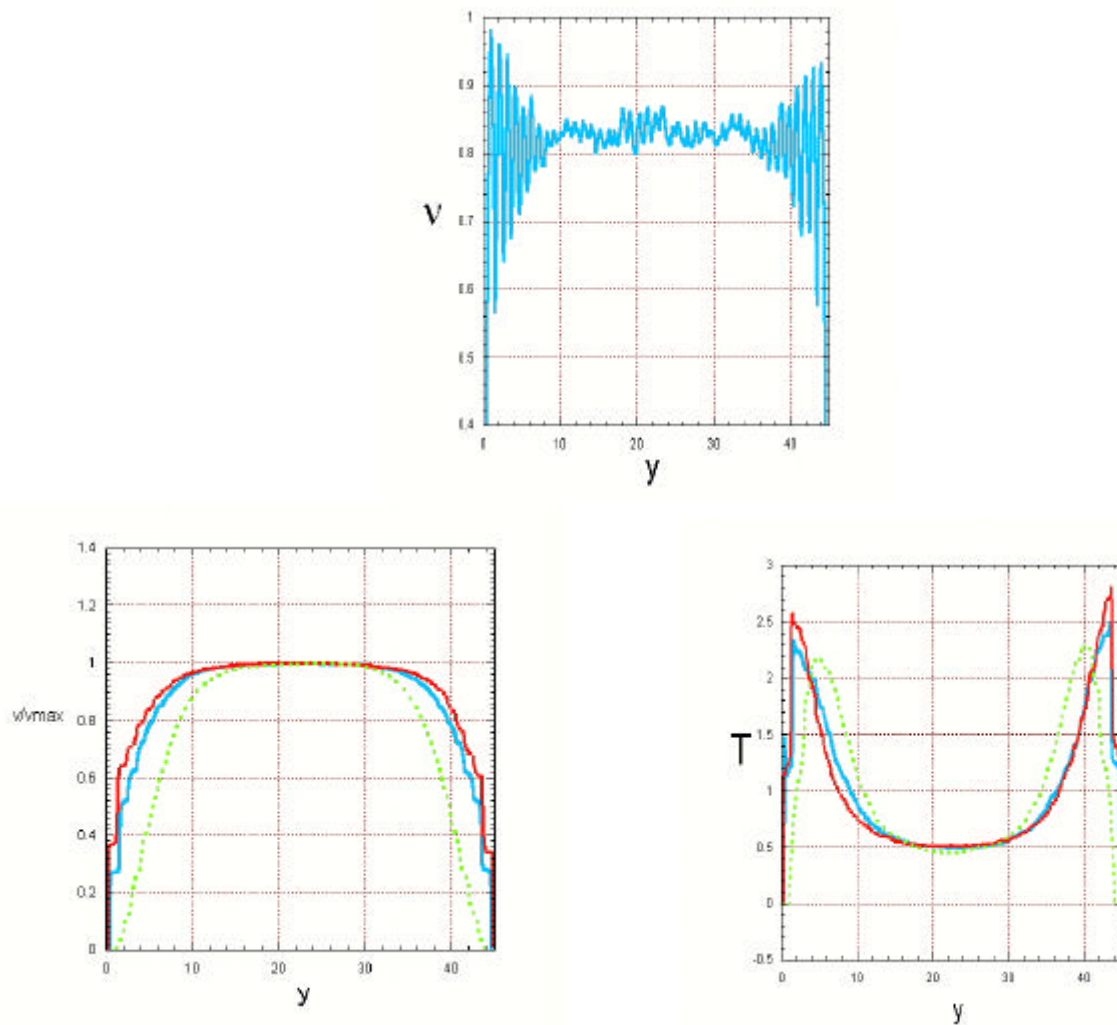


Figure IV-11 : Profils de compacité, vitesse et température. $R = 0,5$ (rouge) – $R = 1$ (bleu) – $R = 4$ (vert)

Cette étude donne un aperçu des grandeurs qui peuvent être étudiées par simulation numérique discrète. C'est sans doute une étude qui mériterait d'être poursuivie. Cependant, nous en sommes restés à cette étude de faisabilité.

II. Conduite à section rectangulaire

Ces résultats ont été obtenus dans le cadre du stage de Frédéric da Cruz et l'on renvoie à son rapport de stage pour plus de détail [daCruz99].

II.A. Dispositif expérimental

Le silo est un silo à fond plat de largeur L de forme parallélépipédique. Il est constitué de deux plaques de verre lisses de 160 cm de hauteur, 50 cm de largeur et de 1 cm d'épaisseur. Ces deux plaques de verre, distantes de 10 cm, sont les fenêtres qui permettent de visualiser le milieu granulaire en écoulement. Les deux autres parois du silo sont en aluminium, et sont rendues rugueuses en y collant, à l'aide d'un adhésif double face, des billes identiques à celles qui composent le milieu granulaire. La compacité linéique mesurée à la paroi est de l'ordre de 0,9, ce qui correspond à des billes quasiment jointives. On peut varier la largeur L de la conduite et l'ouverture D de l'orifice de vidange. Le silo est alimenté par une trémie d'une contenance de $0,25 \text{ m}^3$, ce qui permet d'avoir des écoulements de durée significative (avec une ouverture de 5 mm, l'écoulement peut durer plus de 30 minutes). Cette caractéristique est importante pour la future étude en IRM. Le matériau granulaire est constitué de billes de verre monodisperses de diamètre $d = 1,5 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho_p = 2,7 \text{ kg/dm}^3$.

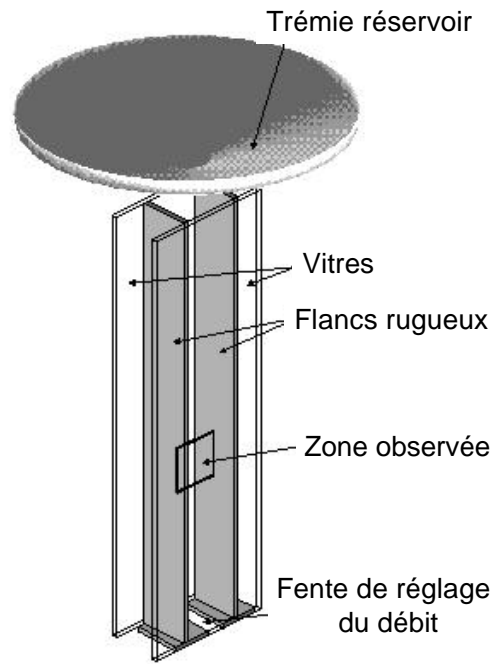


Figure IV - 12 : Vue d'ensemble de la conduite à section rectangulaire.

Les écoulements sont filmés par une caméra numérique rapide (voir Annexe 3). On filme une zone de l'écoulement de $45 \times 45 \text{ mm}^2$ située à environ 90 cm de l'ouverture. La zone choisie est toujours proche d'une paroi afin de visualiser la zone de cisaillement. A la différence des écoulements bidimensionnels étudiés par ombroscopie, c'est ici le reflet du flash stroboscopique sur les billes de verre qui permet de les suivre individuellement. La figure IV-13 montre une image typique.

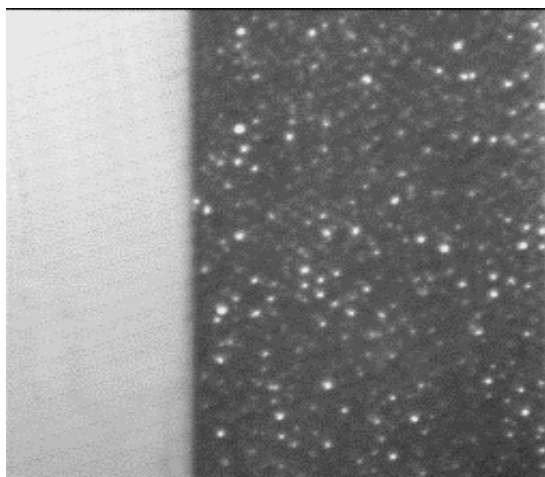


Figure IV - 13 : Reflets du flash stroboscopique sur les billes de verre observé à travers la paroi en verre.

I.B. Résultats

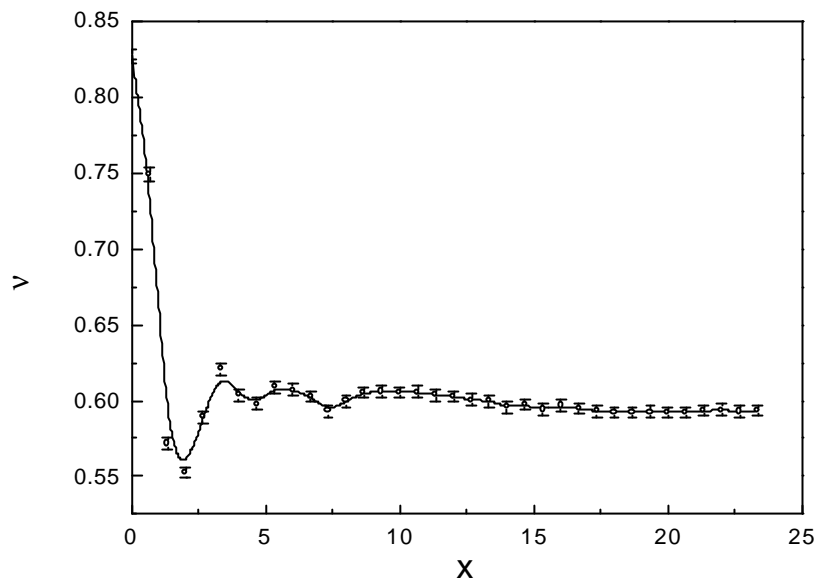


Figure IV - 14 : Profil de compacité mesuré par gamma-densitométrie ($L = 40$, $D = 6,7$).

La figure IV-14 présente un profil de compacité au voisinage de la paroi mesuré par gamma-densitométrie (voir Annexe 1). On constate que la compacité moyenne dans l'écoulement en bloc est de l'ordre de 0,6. Des oscillations dans la zone de cisaillement sont visibles ainsi qu'une chute de la compacité près de la paroi jusqu'à une valeur de 0,55. La partie de la courbe qui passe de 0,55 à 0,9 est située dans la rugosité.

Le profil de vitesse mesuré par corrélation d'image à partir des reflets, met en évidence une localisation du cisaillement près des parois (figure IV-15).

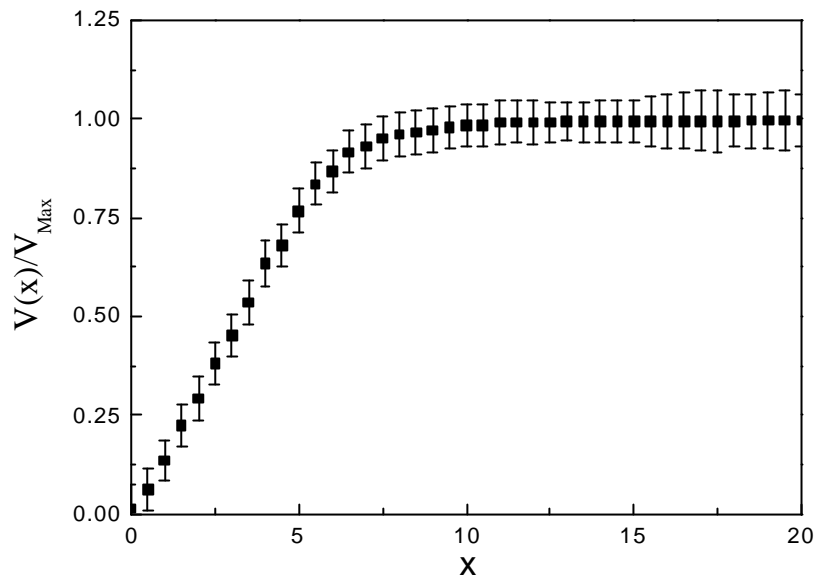


Figure IV - 15 : Profil de vitesse ($L = 40$, $D = 6,7$).

En utilisant l'ajustement linéaire proposé par [Nedderman80], on peut estimer la taille de la zone de cisaillement. Les mesures, résumées dans le tableau IV-1, ont l'ordre de grandeur habituel de la littérature, mais restent cependant assez dispersées (entre 2 et 6,5 d).

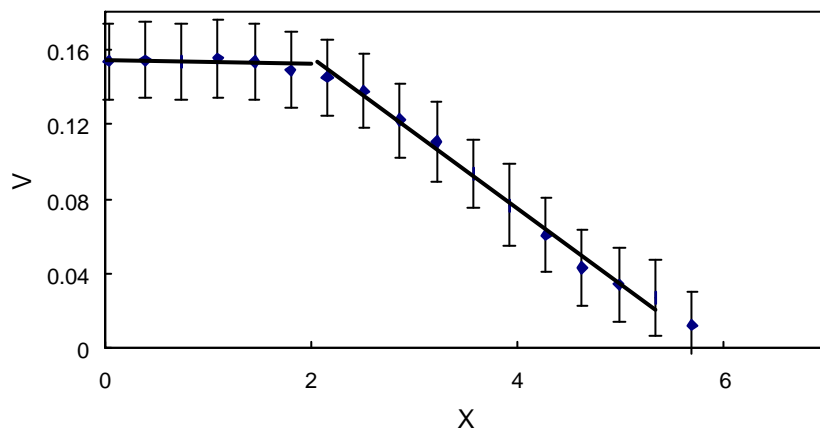


Figure IV - 16 : Estimation de la taille de la zone de cisaillement par ajustement linéaire ($L = 13,33$ - $D = 3,33$).

L\D	3,3	5,3	6,7	7,3	12
13,3	2	3,2		3,3	3,7
20	5,9				3,6
40			6,5		

Tableau IV - 1 : Largeur de la zone de cisaillement en fonction de L et de D.

On retrouve le caractère non-stationnaire mis en évidence en géométrie bidimensionnelle, mais à la différence des écoulements 2D cet effet n'est pas perceptible pour tous les écoulements. Il semble qu'il soit lié à un taux de cisaillement élevé. Plus précisément, on a estimé le taux de cisaillement adimensionné par la fréquence caractéristique $(g/d)^{1/2}$, noté $\dot{\gamma}^*$. Les intermittences de l'écoulement sont perceptibles pour $\dot{\gamma}^* \geq 0,08$. La figure IV-17 montre l'évolution de la vitesse moyenne mesurée dans une bande parallèle aux parois rugueuses dans la zone d'écoulement en bloc. Les grains subissent une succession de phases d'accélération et de décélération brutales autour de la vitesse moyenne. L'accélération caractéristique est comparable à la gravité. Elle suggère une périodicité dans les accélérations et les décélérations. La transformée de Fourier de la moyenne glissante de l'accélération (figure IV-18) met en évidence une période qui vaut environ 60 ms (pour $L = 20$ et $D = 12$), 65 ms (pour $L = 13,3$ et $D = 7,3$) et 43 ms (pour $L = 13,3$ et $D = 12$). Durant cette période, les particules au centre de la conduite ont parcouru une distance moyenne de 9, 5 ou 9 grains respectivement. Pour les écoulements à très fort débit (lorsque $L = D$) on observe toujours une variation importante de la vitesse au cours du temps, mais la transformée de Fourier ne permet pas de mettre en évidence une période. Enfin pour d'autres valeurs des paramètres L et D, les écoulements ne sont pas intermittents. Au total, il apparaît que la caractère intermittent intervient lorsque le taux de cisaillement est assez élevé.

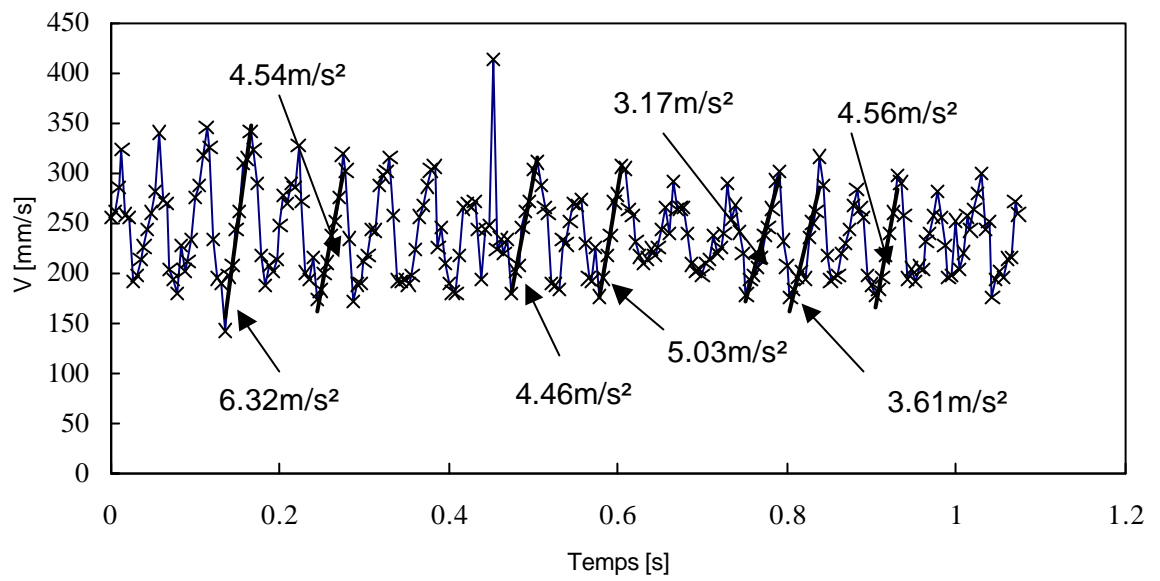


Figure IV - 17 : Variation de la vitesse en fonction du temps pour ($L = 20$, $D = 12$ - $\dot{\gamma}^* \approx 0,28$).

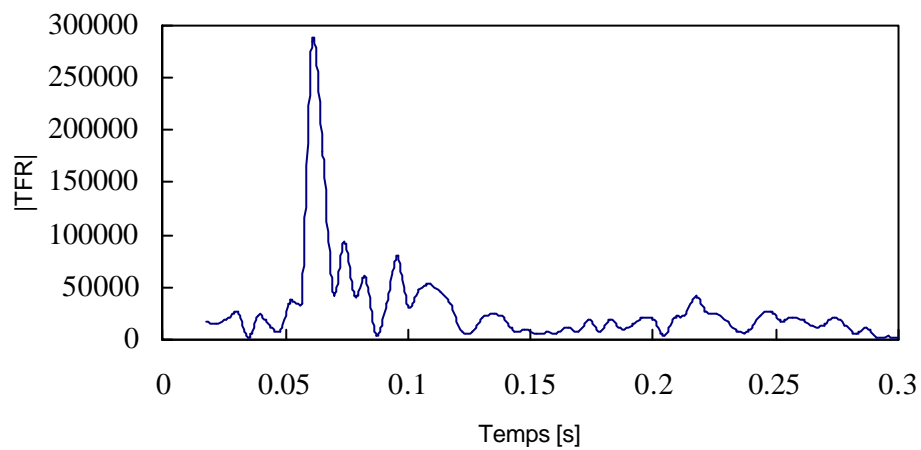


Figure IV - 18 : Transformée de Fourier de l'accélération ($L = 20$, $D = 12$).

III. Conduite circulaire

III.A. Dispositif expérimental

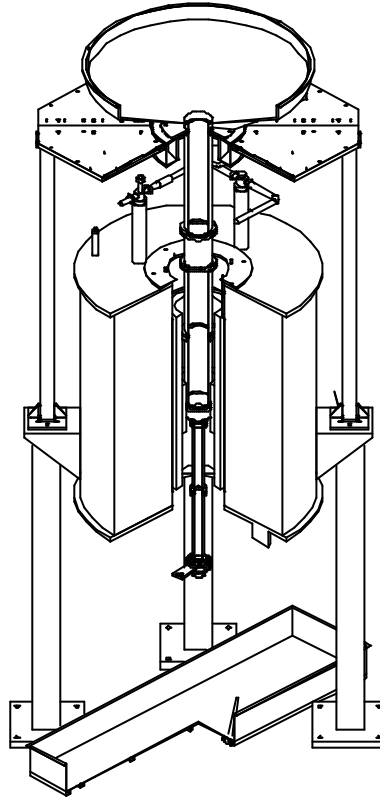


Figure IV - 19 : Coupe schématique de la conduite insérée au centre de l'imageur.

Nous décrivons maintenant le dispositif d'écoulement en conduite verticale insérable dans l'imageur RMN, schématisé sur la figure IV-19.

Le LCPC dispose d'un imageur par résonance magnétique (IRM) Bruker, dédié à des recherches sur les matériaux du génie civil et en particulier sur les matériaux granulaires et poreux. De part ses caractéristiques, cet IRM est un prototype (proche des imageurs hospitaliers) unique au monde. Il a une géométrie verticale et un tunnel, d'un diamètre de 40 cm, assez grand, pour pouvoir contenir l'antenne réceptrice-émettrice et des échantillons pouvant avoir un diamètre maximum de 20 cm. La zone d'observation est restreinte à une zone où le champ magnétique principal B_0 est uniforme, c'est à dire à une sphère d'environ 18

cm de diamètre, placée au centre de l'imageur. Ce champ primaire peut varier entre 0,5 et 2,4 T. Dans l'expérience, sa valeur est fixée à 0,5 T.

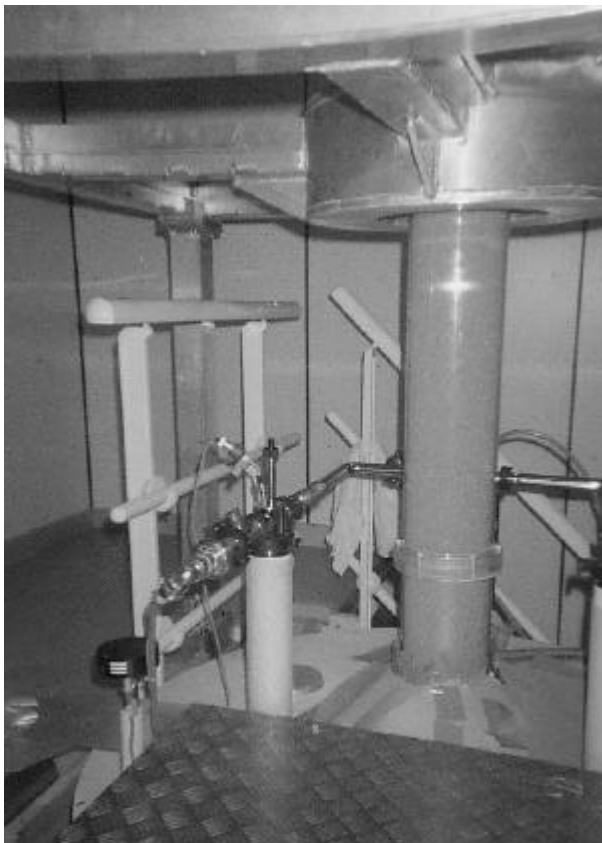


Figure IV-20 : Trémie-réservoir, parties hautes et basses de la conduite.

La conduite verticale (3 m de long) est réalisée dans un matériau amagnétique et isolant (PMMA). Elle est constituée de tronçons de diamètre intérieur de 15,6 cm pour la partie haute (cf. figure IV-19) et 5,4 cm pour la partie basse. Seule la partie basse est située au cœur de l'imageur, c'est à dire dans la zone d'observation. La trémie-réservoir d'alimentation (cf. figure IV-20) est fabriquée dans un matériau de faible susceptibilité magnétique (aluminium), de façon à ne pas perturber le champ magnétique dans l'imageur. La contenance de cette trémie est de l'ordre de 0,25 m³. Elle est fixée sur une plate-forme également en aluminium qui sert de jonction avec la conduite verticale. Dans la partie de la conduite située dans la zone d'observation, nous avons collé une rugosité grâce à un adhésif double face très résistant. On obtient une fraction surfacique de l'ordre de 0,9 (estimation visuelle). Le débit de l'écoulement est contrôlé au niveau de la sortie par des bagues d'ouverture variable (1 cm à 3 cm, par pas de 0,25 cm, correspondant à des débits volumiques allant de 8 à 200 cm³/s).

Le matériau granulaire doit contenir une proportion importante de protons. Les graines de certains oléagineux, tels que moutarde, colza ou bien encore pavot, possèdent cette propriété. Pour des raisons de coût et de géométrie des grains, nous avons choisi de travailler avec des graines de moutarde grossièrement sphériques de diamètre moyen 1,3 mm, et de masse volumique 1200 kg/m³.

III.B. Revue des travaux sur les matériaux granulaires par IRM

Nous résumons ces travaux dans le tableau suivant.

Référence	Matériau	Sollicitation	Technique IRM	Mesure	Conclusions
[Nakagawa 93, 97]	moutarde	Tambour tournant	Tagging Encodage spatial de la phase 1,9 T	Profil de vitesse Profil de compacité	Variation de l'épaisseur de la zone cisailée en fonction de la vitesse de rotation
[Ehrichs95]	pavot	Vibration verticale	Tagging Echo de spin2 T	Profil de vitesse	Convection
[Kuperman 95, 96, 97]	pavot	Vibration verticale	Tagging Echo de spin 2 T	Déplacements moyens Fluctuations	Collisions plus fréquentes sur les parois qu'au centre Distribution gaussienne des déplacements Diffusion
[Cheng97]	moutarde	Tambour tournant	Encodage spatial de la phase 1,9 T	Profil de vitesse	Puissance dissipée
[Hill97a,b,c]	sphères 2 et 4mm	Tambour tournant	Encodage spatial de la phase 1,9 T	Angle de repos en fonction de la polydispersité	Ségrégation axiale
[Yamane98]	Moutarde	Tambour tournant	Tagging à 1,9 T	Profil de vitesse	Mesure quantitative de la vitesse et des fluctuations
[Caprihan97]	Pilules	Vibration verticale	Gradient de champ pulsé à 1,9 T	Imagerie rapide	Bifurcation de période
[Mueth00]		Couette		Profil de vitesse	Localisation du cisaillement
[Porion00]	Pilules	Mélangeur		Position	Mélange
[Metcalf96]	Moutarde	Tambour tournant	2 T	Profil de concentration	Ségrégation
[Ristow 99]	Pilules	Tambour tournant	1,9 T	Position interfaciale	Coefficient de diffusion Dynamique interfaciale
[Caprihan00, Seymour00]	Sphères remplies d'huile	Tambour tournant	Gradient de champ pulsé	Autocorrélation de vitesse	Coefficient de diffusion
[Yang00 et 02]	Moutarde	Vibration verticale	Gradient de champ pulsé à 1 T	Position	Diffusion Profil de température, et de déplacement

Tableau IV-2 : Synthèse des travaux IRM sur les milieux granulaires secs.

III.C. Vélodimétrie IRM

Le principe tomographique de l'IRM permet non seulement une mesure de la concentration des protons (cf. figure IV.21), mais aussi de leur mouvement (voir Annexe 2). La séquence de base utilisée dans nos expériences d'écoulement est la séquence d'écho de spin. Parmi les différentes techniques de vélocimétrie IRM ("tagging", temps de vol...), la méthode de phase exploite le fait que, lorsque les protons se déplacent dans un gradient de champ magnétique, la phase de leur aimantation transverse (la grandeur mesurée en IRM) est affectée par ce mouvement : le déphasage est simplement proportionnel à la composante de la vitesse située dans la plan de coupe, selon la direction du gradient de champ magnétique. En variant le plan de coupe et la direction d'encodage, on peut alors reconstruire le champ de vitesse tridimensionnel.

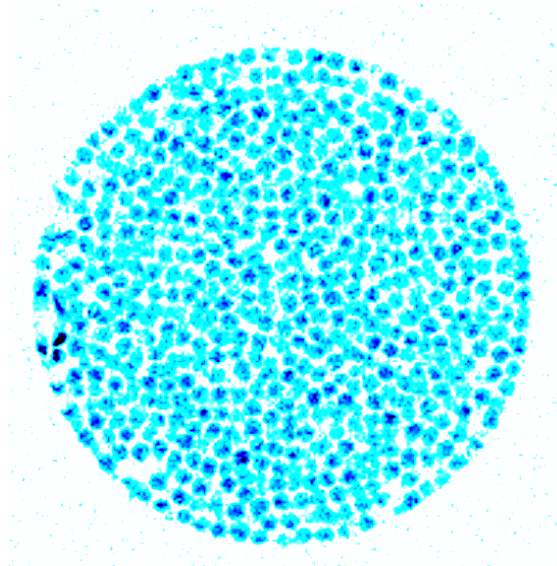


Figure IV - 21 : Densité de proton dans une coupe transversale de la conduite.

Les graines de moutarde ont un temps de relaxation $T_2 = 345$ ms, ce qui est suffisamment long pour pouvoir réaliser des séquence d'imagerie de base telle que l'écho de spin ($T_E = 10$ ms). Le temps de répétition entre échos est fixé à $T_R = 150$ ms. Le nombre d'excitations N_E est égal à 4 (au-delà nous n'avons pas remarqué de nette amélioration du rapport signal sur bruit et donc de la qualité de l'image). Ceci conduit à une durée d'acquisition de séquence T_{AC} de l'ordre de 12 minutes.

Les mesures sont effectuées sur des coupes longitudinales d'une longueur d'environ 15 cm et d'épaisseur 8 mm, au centre de la conduite. La résolution de cette méthode est celle de l'image, soit 256×256 pixels, chaque pixel correspondant à 1,2 mm.

On mesure la composante verticale de la vitesse. Les figures IV-22 et IV-23 montrent les images de phase au repos et en écoulement. Le niveau de gris est proportionnel à la phase, et un motif périodique de frange est superposé en ajoutant un gradient de phase constant avant la transformée de Fourier pour améliorer la lisibilité (technique d'imagerie "zébrée").

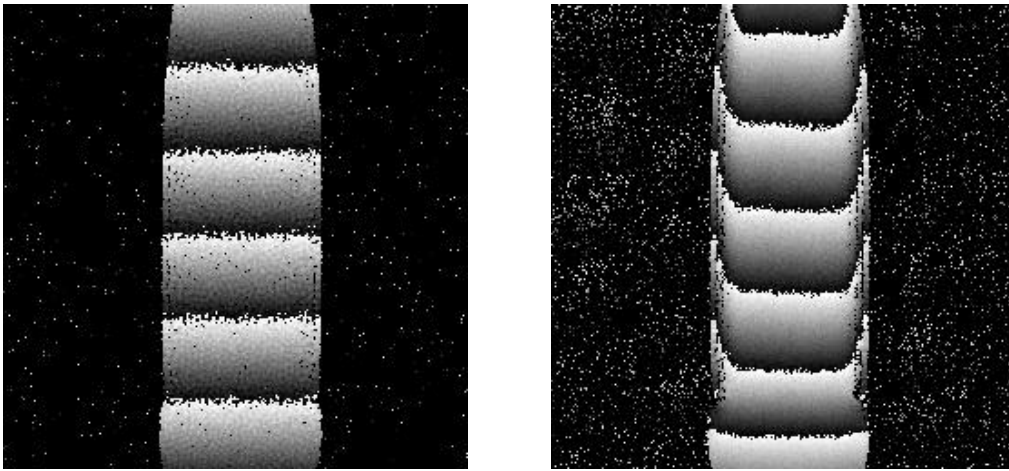


Figure IV - 22 : Images de phase au repos et en écoulement ($D = 13,4$).

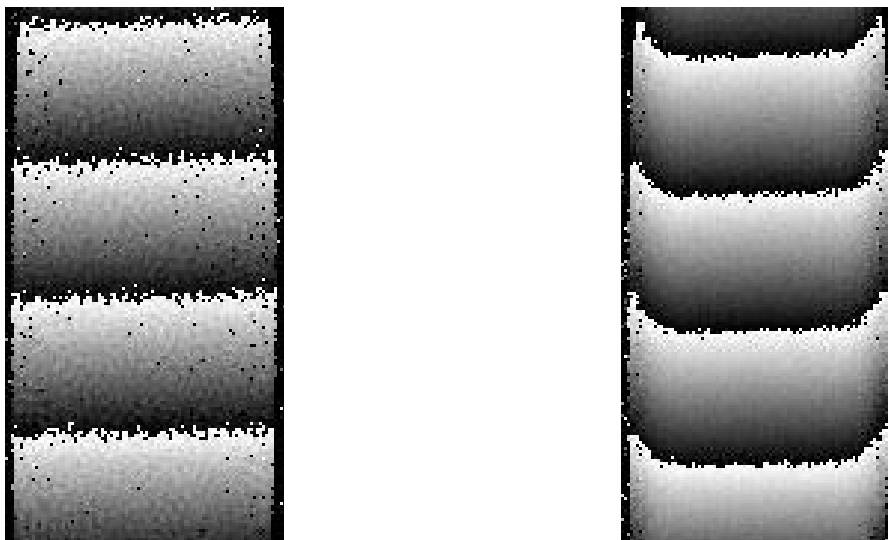


Figure IV - 23 : Images de phase au repos et en écoulement ($D = 9,6$).

III.D. Traitement des images

Il faut maintenant analyser les images de phase pour extraire un profil de vitesse. La vitesse est proportionnelle au déphasage, lequel est mesuré par corrélation entre les images de phase à l'arrêt et en écoulement, c'est à dire une technique analogue à celle mise au point pour la détermination des profils de vitesse en conduite à section rectangulaire. On renvoie à l'Annexe 3 pour des détails sur cette technique. Ceci fournit un profil de vitesse exprimé en pixels (figure IV-24).

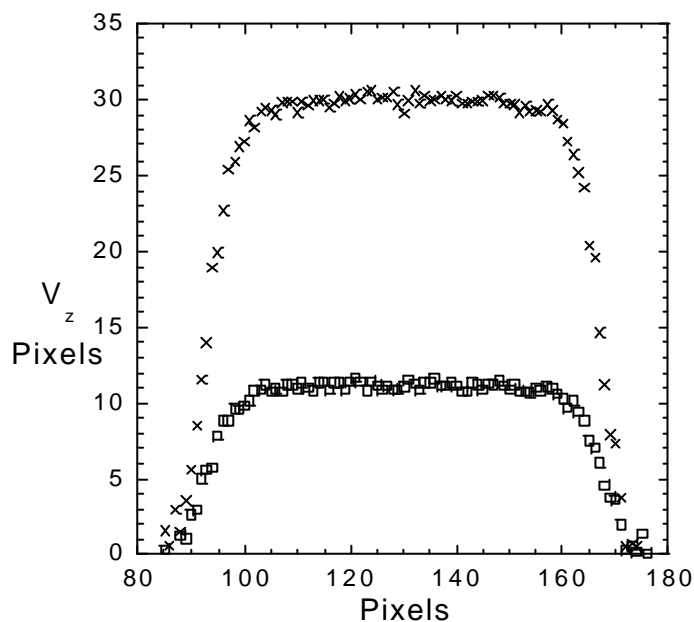


Figure IV - 24 : Profils de vitesse bruts pour $D = 13,4$ (croix) et $D = 9,6$ (carré).

Il faut ensuite calibrer la vitesse. Une méthode élémentaire a consisté à estimer la vitesse moyenne à partir du débit, pour différentes ouvertures, en faisant l'hypothèse d'un écoulement en bloc de fraction solide constante et valant 0,6. Une deuxième méthode, plus précise, a consisté à traduire verticalement à vitesse constante connue (entre -2 cm/s et 2 cm/s) un tube rempli de graines dans la zone d'imagerie, ce qui a fourni une droite de calibration (figure IV-25).

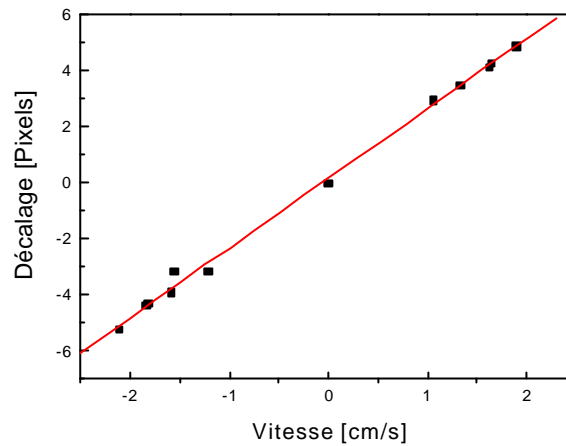
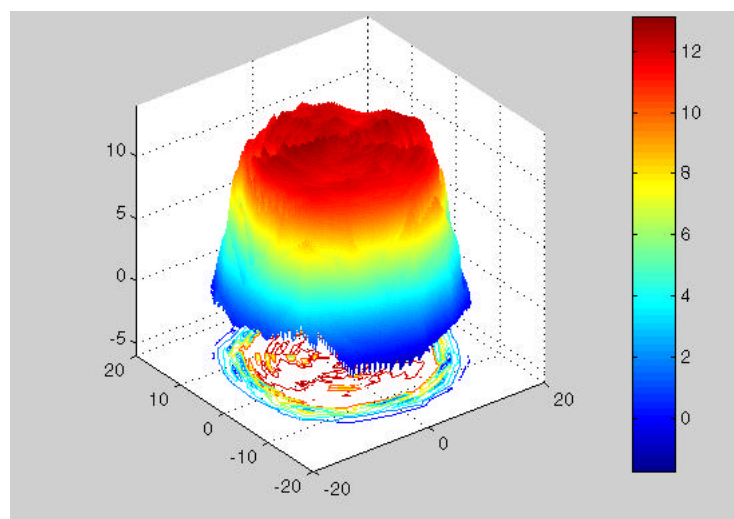


Figure IV - 25 : Droite de calibration.

III.E. Résultats

Les écoulements étudiés sont généralement instationnaires. Ceci a pu être constaté à travers la vibration du tube et de l'air, et a constitué une perturbation sérieuse pour les mesures IRM puisque ces vibrations viennent tuer la cohérence de phase du signal RMN. Ces problèmes ont pu être contournés en moyennant le signal sur une durée d'environ 15 minutes.

La mesure du profil de vitesse est répétée pour une série de plans de coupe verticaux passant par l'axe du cylindre tous les 15° . Une reconstruction des plans de coupe fournit une visualisation tridimensionnelle du champ de vitesse (figure IV-26).

Figure IV - 26 : Reconstruction 3D du champ de vitesse ($D = 9,6$).

La figure IV-27 présente alors une moyenne du profil de vitesse sur les 12 plans de coupe pour trois ouvertures (les taux de cisaillement adimensionnés correspondants sont entre 0,03 et 0,1). On a fait figurer en grisé les barres d'erreur. La précision de la mesure est de l'ordre de 4%. Il s'agit bien d'un écoulement en bloc au centre de la conduite avec des zones de cisaillement au voisinage de la paroi.

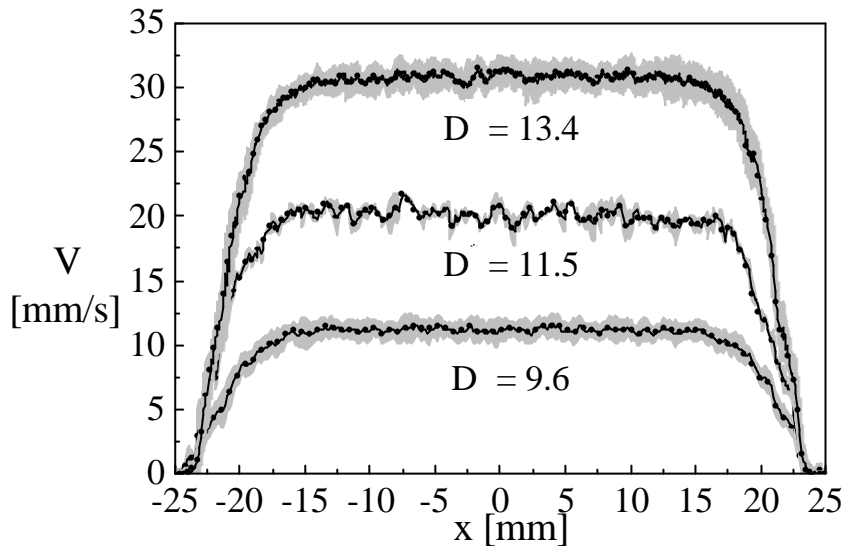


Figure IV - 27 : Profils de vitesse pour trois ouvertures.

La figure IV-28 compare ces mêmes profils normalisés par la vitesse au centre de la conduite. On observe que la zone de cisaillement a une largeur d'environ 6 grains. On a également superposé un profil de vitesse adimensionné mesuré dans la conduite à section rectangulaire avec des billes de verre (voir figure IV-12), dans la même gamme de taux de cisaillement ($\dot{\gamma}^* \approx 0,03$). L'accord est remarquable. Le fait que les profils de vitesse se superposent plaident en faveur d'un comportement quasi-statique, indépendant du taux de cisaillement.

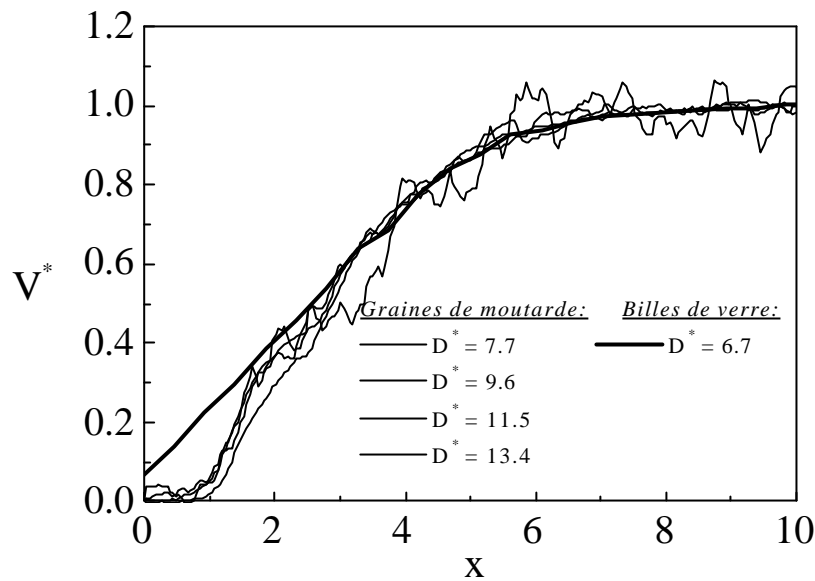
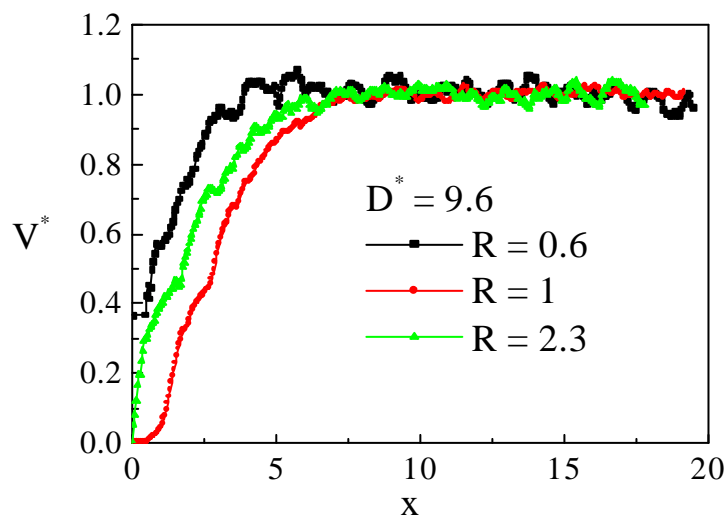


Figure IV - 28 : Profils de vitesse normalisée.

On a ensuite étudié l'influence de la rugosité sur la zone de cisaillement. On fait toujours s'écouler des graines de moutarde, mais on modifie la rugosité en collant des billes en verre de diamètre respectif $d = 0,8$ mm et 3 mm, à la place des graines de moutarde. On définit la rugosité R comme le rapport entre le diamètre des billes collées et le diamètre des graines de moutardes. On peut donc comparer trois rugosités $R = 0,6 - 1$ ou $2,3$. La figure IV-29 montre alors qu'une vitesse de glissement existe pour une faible rugosité ($R = 0,6$), mais disparaît pour une rugosité supérieure à l'unité, ce qui est en accord avec les résultats de la simulation numérique.

Figure IV - 29 : Influence de la rugosité des parois sur la zone de cisaillement ($D = 9,6$).

III.F. Perspectives

Ces résultats permettent d'envisager une étude plus complète des écoulements granulaires confinés. On a ainsi commencé à étudier des géométries d'écoulement où le champ de vitesse est plus compliqué : convergent, voisinage de l'orifice... (voir figure IV-30). Il faut alors déterminer une deuxième composante de la vitesse, ce qui nécessite certains développements dans l'analyse du signal RMN. Il serait aussi intéressant de pouvoir mesurer d'autres grandeurs (compacité, fluctuations de vitesse).

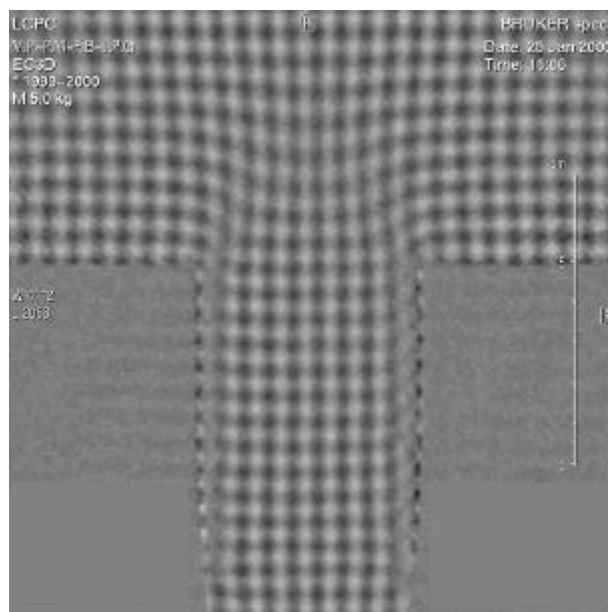


Figure IV -30 : Champ de déformation dans un rétrécissement de section.

IV. Conclusion

Ces différents travaux ont permis d'étudier quantitativement les écoulements granulaires denses en conduite verticale, et plus particulièrement la zone de cisaillement au voisinage des parois. On a comparé les écoulements en dimension 2 et 3. On a étudié l'influence de la rugosité de la paroi, et du débit. On a montré que la mesure à la paroi est très voisine de la mesure à l'intérieur de l'écoulement. On a aussi remarqué que l'écoulement est le plus souvent intermittent.

CHAPITRE V

MODELISATION ET

DISCUSSION DES RESULTATS

CHAPITRE V

MODELISATION ET

DISCUSSION DES RESULTATS

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques éléments de modélisation des écoulements denses de grains secs. Une première partie va concerner la loi de comportement du matériau en écoulement : nous allons discuter les hypothèses et les prédictions de plusieurs modèles rhéologiques. La deuxième partie concernera la micromécanique de ces écoulements, et proposera quelques éléments sur le passage entre l'échelle microscopique et celle des grandeurs moyennées (frottement, rotation et tenseur des contraintes). La comparaison avec nos résultats se limitera au cas des écoulements sur plan incliné, c'est à dire aux résultats des simulations numériques du chapitre III.

I. Etude comparée de modèles rhéologiques

A côté des travaux expérimentaux et numériques présentés au chapitre II, un grand effort a été consacré à la description théorique des écoulements denses de grains secs. Un bon modèle doit être capable de reproduire les observations du chapitre III, et plus généralement dans les différentes géométries d'écoulement présentées au chapitre II. Il s'agit donc de déterminer quelles sont les bonnes variables d'une description macroscopique, quelle est la validité d'approches hydrodynamiques... Plusieurs types de modèles ont été proposés, mais aucune théorie unifiée n'existe à ce jour. Nous allons faire une revue de ces modèles (inspirée de celle de [Pouliquen02a]), en discutant plus en détail certains d'entre eux.

Compte-tenu de la sensibilité (non pas qualitative, mais quantitative) des profils de vitesse à la polydispersité (voir Fig. III-13) ou encore au coefficient de frottement (voir Eq.II.5), il nous semble difficile d'espérer un accord quantitatif précis (à mieux qu'un facteur 2 par exemple). Par contre, il est important de retrouver les tendances qualitatives. Une fois

trouvé un modèle satisfaisant de ce point de vue, il sera temps de le raffiner pour ce qui concerne l'aspect quantitatif.

Nous commençons donc par rappeler certaines caractéristiques des écoulements sur plan incliné, mises en évidence au chapitre III, que nous chercherons à confronter aux prédictions des modèles. Nous retiendrons les informations suivantes :

- l'existence d'une plage d'écoulement stationnaire uniforme, limitée par une courbe $H_{\text{top}}(\theta)$ (figure III-3),
- la compacité constante à distance du socle, avec une dilatance notable en fonction de l'inclinaison (figure III-4 et 5),
- l'ajustement du profil de vitesse par une loi de la forme $a \log(1+z/b)$, l'accord avec la prédiction de Bagnold au cœur de l'écoulement, avec des déviations près du socle et près de la surface libre (figures III-11 et 12),
- la loi d'échelle pour la vitesse moyenne (figure III-15),
- la relation entre fluctuations de vitesse et taux de cisaillement (figure III-23),
- le comportement singulier de l'écoulement dans les 5 à 10 premières couches près du socle où le milieu est structuré (figure III-4).

Nous rappelons aussi quelques notations que nous utiliserons dans la suite (figure V-1). On considère une assemblée de grains de diamètre moyen d (on ne cherchera pas à prendre en compte l'effet de la polydispersité, sinon à travers la valeur de la compacité maximale, lâche de l'empilement), de masse volumique ρ_p , s'écoulant sous l'effet de la gravité g . Ces grains sont caractérisés par un coefficient de restitution e (égal à 0), et un coefficient de frottement μ . On s'intéresse à des écoulements stationnaires et uniformes, de sorte que les grandeurs moyennes ne dépendent que de la cote y perpendiculaire à l'écoulement ($y = 0$ au socle, on note aussi $z = H - y$ où H est l'épaisseur de la couche en écoulement). On note $v(y)$ la compacité, $u(y)$ la vitesse moyenne (et $\dot{\gamma}(y)$ le taux de cisaillement), $T(y)$ la « température » (carré des fluctuations de vitesse $w(y)$), $N(y)$ la contrainte normale (> 0), et $S(y)$ la contrainte de cisaillement (> 0).

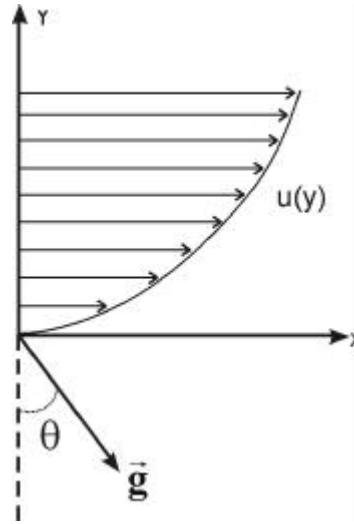


Figure V-1 : Schéma de l'écoulement.

La compacité v est normalisée par la compacité maximale possible pendant l'écoulement, c'est à dire la compacité de l'empilement désordonné lâche v_m ($v \equiv v/v_m$) - cf. figure III-5. On considère le cas de milieux denses, c'est à dire v voisin de 1.

Par ailleurs, longueur, temps, vitesse et contrainte sont adimensionnés respectivement par d , $(d/g)^{1/2}$, $(gd)^{1/2}$ et $\rho_p v_m g d$.

Sur un plan incliné d'un angle θ (avec l'approximation des petits angles), la conservation de la quantité de mouvement donne pour un écoulement stationnaire uniforme (cf. Eq. I-20) :

$$\begin{cases} N' = -v \cos \theta \simeq -v \\ S' = -v \sin \theta \simeq -v\theta \end{cases} \quad [\text{V.1}]$$

A la surface libre ($y = H$), on écrit l'annulation des contraintes. En tenant compte du fait expérimental et numérique que la compacité est constante ($v(y) = v$), on peut alors écrire :

$$\begin{cases} N(y) = v (H - y) = vz \\ S(y) = \theta N(y) = v\theta (H - y) = v\theta z \end{cases} \quad [\text{V.2}]$$

Par ailleurs, on utilisera l'observation que la vitesse de glissement à la paroi est nulle :

$$u(0) = 0 \quad [\text{V.3}]$$

I.A. Modèles frictionnels

Nous évoquons très succinctement les modèles purement frictionnels (notés avec un exposant «F»), qui ont déjà été décrits au chapitre I §V.A. Il s'agit de modèles décrivant l'évolution quasi-statique d'assemblées de grains interagissant à travers un réseau de contacts maintenus frottants. En écoulement, on peut écrire que le critère de rupture de Mohr-Coulomb est atteint, de sorte que :

$$S^F = \phi N^F \quad [\text{V.4}]$$

où ϕ est l'angle de frottement interne du matériau (on a fait l'approximation $\tan \phi \approx \phi$). Dans ce cas, la loi de comportement ne dépend pas du taux de cisaillement. Un modèle rigide-plastique, incluant des dépendances avec la compacité, a pu être appliqué aux écoulements en conduite verticale (silos et trémies) [Tüzün82, Tardos97]. Des théories de plasticité "micropolaires", de type Cosserat, prenant en compte un degré de liberté supplémentaire associé à la rotation des grains [Limat98], ont aussi été utilisées pour décrire les profils de vitesse dans un silo [Mohan99] et dans une cellule de cisaillement [Mohan01]. On peut penser que de tels modèles peuvent être suffisants pour décrire les écoulements en conduite verticale, dans la plage de débit où nous nous sommes placés, et où nous avons observé toujours la même forme du profil de vitesse.

I.B. Modèles collisionnels

On considère maintenant les modèles prenant en compte la contribution des chocs (notés avec un exposant «c»). Comme dans l'analyse de Bagnold décrite au chapitre I § V.B, on peut chercher à déterminer les composantes du tenseur des contraintes (N^c , S^c) à partir des transferts de quantité de mouvement dans les chocs, calculés par unité de temps (la fréquence des chocs) et par unité de surface (ou de longueur en 2D, soit d dans un milieu dense). En considérant les différentes échelles de fréquence ($\dot{\gamma}, (g/d)^{1/2}$ et w/d) et de vitesse ($\dot{\gamma}d$, $(gd)^{1/2}$, w) intervenant dans l'écoulement, on trouve différentes contributions possibles aux

composantes du tenseur des contraintes : , où les dépendances en compacité $F_i(v)$ expriment la divergence de la fréquence des chocs lorsque l'interstice entre grains se réduit ($v \rightarrow 1$, compte-tenu de la normalisation de la compacité par v_m). Rappelons que selon l'analyse de Bagnold, $F_i(v) \propto 1/(1-v)$. La contrainte de cisaillement doit être proportionnelle au taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, avec un facteur de proportionnalité qui définit la viscosité η :

$$S^C = \eta \dot{\gamma} \quad \text{avec} \quad \eta = F_s(v) \left(A + B\dot{\gamma} + CT^{1/2} \right) \quad [\text{V.5}]$$

Nous allons dans la suite distinguer les modèles avec ou sans fluctuations de vitesse.

I.B.1. Sans fluctuations de vitesse

On écrira alors plus simplement :

$$S^C = F_s(v) \left(1 + \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c} \right) \dot{\gamma} \quad [\text{V.6}]$$

Nous allons donner une interprétation qualitative de ce résultat. Nous repartons de l'image de Bagnold d'un écoulement structuré en couches (image plus pertinente à proximité du socle ou pour un milieu monodisperse) et du scénario simplifié de chocs binaires entre deux grains situés dans deux couches adjacentes. Par rapport à l'analyse du chapitre I §V.B, on va cette fois-ci tenir compte de l'effet de la gravité. On note toujours ϕ_i l'angle d'impact compté par rapport à l'axe y (et supposé petit). La vitesse d'impact est la somme de la vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$ selon x et de la vitesse de chute v_{ch} selon y , dans l'interstice h entre deux grains ($v_{ch} = (2h)^{1/2}$) (voir Figure V-2).

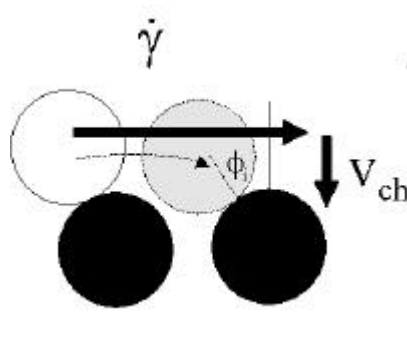


Figure V-2 : Transfert de quantité de mouvement entre deux couches sous gravité.

Dans l'hypothèse d'un choc complètement inélastique et glissant (avec coefficient de frottement μ), la discontinuité de vitesse selon x , qui s'identifie essentiellement à la viscosité η , vaut :

$$\eta \approx \langle \Delta u_x \rangle \approx (\mu + \phi_i) \cdot (\phi_i \dot{\gamma} + v_{ch}) \quad [V.7]$$

Ceci permet d'identifier :

$$\begin{cases} F_s(v) = (\mu + \phi_i) v_{ch} \\ \dot{\gamma}_c = \frac{v_{ch}}{\phi_i} \end{cases} \quad [V.8]$$

Si l'on prend l'image la plus simple de disques jointifs dans une couche, on a $h \approx 1 - \sqrt{3}/2$ et $\phi_i = \pi/6$, soit $v_{ch} \approx 0,5$ et $\phi_i \approx 0,5$. En conséquence :

$$\begin{cases} F_s \approx \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4} \\ \dot{\gamma}_c \approx 1 \end{cases} \quad [V.9]$$

Naturellement, ceci reste indicatif du point de vue quantitatif. Par ailleurs, une telle analyse ne prédit pas de divergence de la viscosité au voisinage de la compacité maximale. On peut retenir par contre la prédiction de l'évolution d'un régime linéaire au faible taux de cisaillement vers un régime quadratique (de Bagnold) au fort taux de cisaillement. Le régime linéaire correspond à un transfert de quantité de mouvement dominé par la chute des grains sous gravité (régime «gravitaire ») alors que le régime quadratique correspond au régime «inertiel». La transition entre les deux régimes a lieu pour un taux de cisaillement adimensionné d'ordre 1. Notons que les taux de cisaillement mesurés dans nos écoulements sont en général au plus de l'ordre de 1 près du socle, puis décroissent d'un facteur 2 ou 3 dans les 5 à 10 premières couches, enfin décroissent plus doucement jusqu'à la surface libre.

Le schéma précédent peut constituer une première explication du comportement singulier du matériau près de la paroi. La structuration du milieu permettrait aux couches de facilement glisser les unes sur les autres (contact rasants donnant de plus faibles transferts de quantité de mouvement). Loin de la paroi, les mouvements sont plus enchevêtrés, ce qui augmenterait la viscosité. En somme, on aurait une transition d'un régime linéaire près de la

paroi vers un régime quadratique à distance. Ceci pourrait qualitativement être décrit en introduisant une dépendance du taux de cisaillement critique $\dot{\gamma}_c$ avec la distance à la paroi.

I.B.2. Avec fluctuations de vitesse

Naturellement, on doit tout d'abord se poser la question de la signification des fluctuations de vitesse dans un écoulement dense. Les théories cinétiques, où cette grandeur joue un rôle fondamental, traitent des situations où les grains interagissent par des collisions binaires non corrélées. Comme dans les gaz de sphères dures, on peut espérer que les collisions restent binaires (à défaut d'être non corrélées) jusqu'à des compacités élevées, tant que les collisions sont peut dissipatives. En revanche, lorsque le coefficient de restitution est assez faible et le coefficient de frottement assez élevé, ce qui est précisément le type de situation que l'on considère, il s'établit un réseau de contact à travers le système (cf. chapitre III §V). Dans ce cas, les fluctuations de vitesse mesurées correspondent non pas aux fluctuations des mouvements des grains dans leur cage, mais à des contraintes géométriques. En conséquence, l'équation d'énergie, qui décrit les transferts d'énergie dans le système sous l'effet des chocs, doit être complètement reconsidérée. De plus, on peut penser que l'amplitude de ces fluctuations du mouvement, étant d'origine géométrique, doit vérifier une loi d'échelle géométrique, c'est à dire que $w/\dot{\gamma}$ est une fonction de la compacité (mesurée par [daCruz02b]). Dans un milieu de compacité constante, ce rapport doit donc être une constante.

I.B.2.a. Limite dense de la théorie cinétique

On va cependant examiner les prédictions de la théorie cinétique dans la limite dense. On rappelle les résultats exposés au chapitre I §V.B, à savoir les dépendances en compacité et en température des contraintes normale et de cisaillement, du flux de chaleur Q et du taux de dissipation de l'énergie I :

$$\begin{cases} N^C = A_N F(v) T \\ S^C = A_S F(v) T^{1/2} \dot{\gamma} \\ Q = -A_Q F(v) T^{1/2} T' \\ I = A_I F(v) T^{3/2} \end{cases} \quad [\text{V.10}]$$

Les dépendances en compacité sont données par :

$$F(v) = \begin{cases} \frac{v^2(16-7v)}{16(1-v)^2} & \text{en 2D} \\ \frac{v^2(2-v)}{2(1-v)^3} & \text{en 3D} \end{cases} \quad [\text{V.11}]$$

Attention, dans ces dernières expressions, la compacité n'est pas normalisée par la compacité maximale. Pour un milieu de polydispersité p , la correction à la fonction de distribution radiale serait en 2D [Luding00] :

$$\begin{cases} g_0(v) = \frac{1}{2} \frac{(1+A) - v(1-A/8)}{(1-v)^2} \\ A = \frac{1}{1+p^2/3} \end{cases} \quad [\text{V.12}]$$

Pour une polydispersité de 20%, la correction reste limitée à 1% seulement.

Cependant, lorsque la compacité dépasse la compacité v_1 dite de « gel » (0,49 en 3D et 0,67 en 2D), il semble qu'il faille adopter une autre expression pour la divergence en compacité [Torquato95, Luding00]. La fonction $F(v)$ (Eq. V.11) doit être remplacée par la fonction $G(v)$ (cette fois ci avec la convention de normalisation pour la compacité) :

$$G(v) = \frac{1}{1-v} \quad \text{pour } \frac{v_1}{v_m} < v < 1 \quad [\text{V.13}]$$

Les dépendances en compacité des différentes fonctions s'écrivent alors :

$$\begin{cases} N^c = B_N G(v) T \\ S^c = B_S G(v) T^{1/2} \dot{\gamma} \\ Q = - B_Q G(v) T^{1/2} T' \\ I = B_I G(v) T^{3/2} \end{cases} \quad [\text{V.14}]$$

Les préfacteurs B_i sont définis par continuité avec les valeurs des Eq. V.10 et 11 pour $v = v_1$, soit à partir des préfacteurs A_i donnés par les Eq.I.41 et 42 :

$$\frac{B_i}{A_i} = \begin{cases} \frac{v_1^2(16-7v_1)(v_m-v_1)}{16v_m(1-v_1)^2} \approx 0,5 & \text{en 2D} \\ \frac{v_1^2(2-v_1)(v_m-v_1)}{2v_m(1-v_1)^3} \approx 0,3 & \text{en 3D} \end{cases} \quad [\text{V.15}]$$

Le calcul des profils de compacité, vitesse et température se fait de la façon suivante. On commence par résoudre l'équation d'énergie (I-23) - ce qui va être expliqué juste après - ce qui fournit le profil $w(y)$. Ensuite, on calcule le profil de vitesse en écrivant le rapport des contraintes normales et tangentielles :

$$u' = \frac{B_N}{B_S} \theta w \Rightarrow u(y) = \frac{B_N}{B_S} \theta \int_0^y w(t) dt \quad [\text{V.16}]$$

Par ailleurs, on calcule le profil de compacité à partir de l'expression de la contrainte normale :

$$v(y)(1-v(y)) = \frac{B_N w^2(y)}{(H-y)} \Rightarrow v(y) \approx 1 - \frac{B_N w^2(y)}{(H-y)} \quad [\text{V.17}]$$

Pour que l'ensemble soit cohérent, il faut vérifier que la compacité reste élevée (supérieure à la compacité de gel).

L'équation en énergie s'écrit simplement, car on arrive à éliminer la dépendance explicite en compacité, en utilisant la variable $w = T^{1/2}$ [Jenkins94] :

$$w'' + \frac{1}{z} w' + C(\theta)w = 0 \quad [\text{V.18}]$$

$$\text{avec } C(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{B_N^2}{B_S B_Q} \theta^2 - \frac{B_I}{B_Q} \right) = \alpha(e) \theta^2 - \beta(e) \quad [\text{V.19}]$$

Les fonctions α et β dépendent du coefficient de restitution e , à travers les dépendances des préfacteurs A_i exprimées par les Eq. I.41 et 42. Les solutions de l'Eq.V-17 sont connues, ce sont des fonctions de Bessel modifiées. La solution dépend du signe de C , et donc de la valeur de l'inclinaison par rapport à une inclinaison critique :

$$\theta_c(e) = \sqrt{\frac{\beta(e)}{\alpha(e)}} = \sqrt{\frac{A_I(e)A_S(e)}{A_N^2(e)}} \quad [\text{V.20}]$$

Si $\theta > \theta_c$, la solution est la fonction de Bessel du premier type :

$$w(y) = w(0) \frac{J_0(\sqrt{C}(H-y))}{J_0(\sqrt{C}H)} \quad [\text{V.21}]$$

Compte-tenu du caractère oscillant de J_0 , cette solution ne vaut que pour des épaisseurs inférieures à $H(\theta) = 2,4 / \sqrt{C(\theta)}$. On observe alors une augmentation des fluctuations du socle vers la surface libre, et une décroissance rapide de la compacité [Ancey01]. Cette solution ne peut donc être retenue.

Si $\theta < \theta_c$, la solution est la fonction de Bessel modifiée du premier type :

$$w(y) = w(0) \frac{I_0(\sqrt{C}(H-y))}{I_0(\sqrt{C}H)} \quad [\text{V.22}]$$

On observe cette fois-ci une décroissance des fluctuations du socle vers la surface libre, et la compacité reste élevée, sauf tout près de la surface libre [Ancey01]. Cette solution semble donc plus raisonnable. Notons par ailleurs que le flux de chaleur s'annule à la surface libre ($y = H$). Le seul paramètre libre est la valeur des fluctuations de vitesse au socle $w(0)$. Il doit pouvoir être déterminé par un bilan d'énergie au socle. Il vient en facteur de la vitesse et donc du débit.

Rappelons que le seul paramètre de ce modèle est le coefficient de restitution e . L'observation, citée au chapitre II, que les profils de compacité et vitesse ne dépendent pas de e , pour e assez petit ($e < 0,7$) incite à chercher les solutions dans toute la gamme de e , et en particulier dans la limite complètement dissipative $e = 0$. C'est ce que nous avons fait sur la Figure V-3, dans le cas 2D (on trouve alors une inclinaison critique $\theta_c = 43^\circ$). D'autres profils typiques de compacité, vitesse et taux de cisaillement ont été tracés par [Anderson92, Jenkins94, Ancey01].

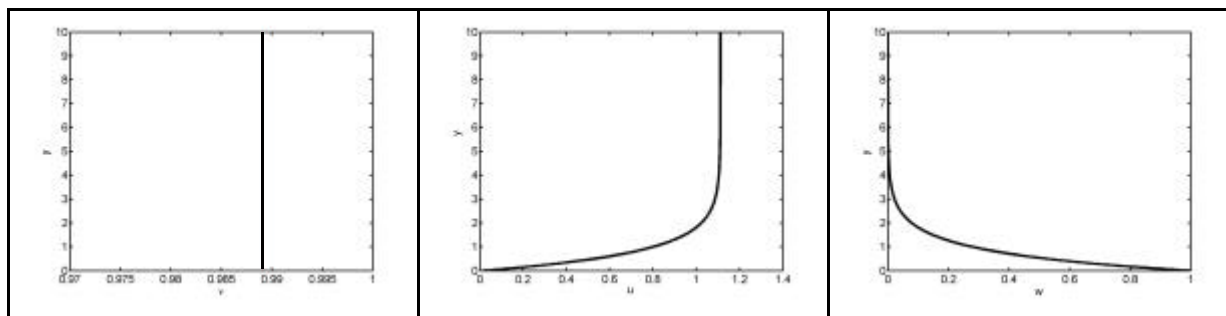


Figure V-3 : Profils de compacité, vitesse et température

dans le cadre de la limite dense de la théorie cinétique ($e = 0$, $H = 10$, $q = 20^\circ$, $w(0) = 1$).

Un tel modèle prédit une localisation du cisaillement près de la paroi, d'autant plus marquée que l'on descend en dessous de l'inclinaison critique, ce qui n'a pas été observé dans les simulations numériques. En revanche, il est possible qu'un seuil d'écoulement (sous la forme d'une courbe $H(\theta)$?) puisse être prédit, à partir d'un bilan d'énergie à la paroi. On renvoit pour cela aux analyses de [Richman90, Sadjadpour99]

La solution précédente ne vaut que dans les régions où la compacité est supérieure à la compacité de gel. Sinon, il faut prendre en compte les dépendances en compacité présentées au chapitre I § V.B, éventuellement en ne se limitant pas au régime collisionnel, mais en prenant aussi la contribution du régime cinétique (Eq.I.35 et 36). Ceci est le cas dès que l'on s'approche de la surface libre. Il faut alors avoir recours à une résolution numérique. On présente sur la figure V-4 le résultat d'une telle résolution numérique menée par Jenkins pour $e = 0,4$, $\theta = 12^\circ$, $H = 30$ (en trois dimensions). Les conditions aux limites sont les suivantes : flux d'énergie nul et vitesse nulle à la paroi, arrêt de la simulation à la surface libre lorsque la compacité correspond au régime balistique. On constate que le profil de compacité est réaliste. Le profil de vitesse est trop linéaire. En revanche, le profil de température n'a pas le bon sens de variation. C'est une étude qui mériterait d'être poursuivie pour étudier l'influence des paramètres et des conditions aux limites.

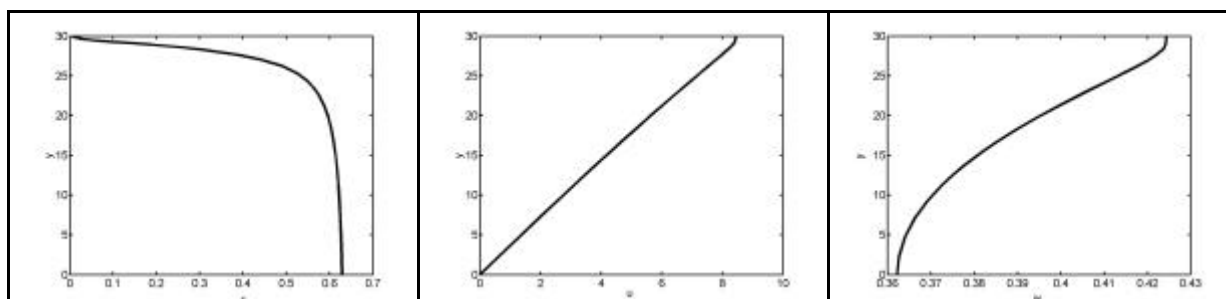


Figure V-4 : Profils de compacité, vitesse et température prédits par la théorie cinétique.

En marge de cette discussion, signalons l'étude d'écoulements collisionnels denses en géométrie confinée [Denniston99], où l'anisotropie des directions d'impact est explicitement prise en compte dans l'estimation du tenseur des contraintes. Des chaînes de collision se forment spontanément et conduisent à une résistance au cisaillement.

I.B.2.b. Modèles inspirés de la transition vitreuse

Par analogie avec les résultats sur la dynamique des systèmes vitreux, Bocquet a récemment conjecturé une divergence plus rapide de la viscosité près de la compacité maximale ($v \geq v^*$) [Losert00, Bocquet01 et 02] :

$$S^C = B_s' G(v)^\beta T^{1/2} \dot{\gamma} \quad \text{avec } 2 > \beta > 1,5 \quad [\text{V.23}]$$

où B_s' se déduit de B_s par continuité : $B_s'/B_s = G(v^*)^{1-\beta}$. Ceci serait la conséquence des réarrangements coopératifs pour les grains emprisonnés dans des cages. Par contre, les dépendances en compacité de la pression, de la conductivité thermique et du taux de dissipation de l'énergie restent inchangées. L'équation d'énergie devient :

$$w'' + \frac{w'}{z} + \frac{1}{2} \left(\frac{B_N^2}{B_s B_Q} \theta^2 \varepsilon^{\beta-1} - \frac{B_I}{B_Q} \right) w = 0 \quad [\text{V.24}]$$

où $\varepsilon = 1 - v$. En conséquence, si le milieu est très dense, cette équation peut être approximée par l'équation suivante, indépendante de l'inclinaison :

$$w'' + \frac{w'}{z} + Cw = 0 \quad [\text{V.25}]$$

avec $C = -B_I/2B_Q$. On retrouve la solution (V-22) pour $w(y)$ (pour $\theta = 0$). La compacité reste donnée par l'Eq.V.17, mais la relation entre taux de cisaillement et fluctuations de vitesse est cette fois-ci donnée par :

$$\frac{u'}{w} = \frac{B_N}{B_s'} \theta G(v)^{1-\beta} \quad [\text{V.26}]$$

Dans le cas du cisaillement annulaire, la résolution du problème prédit une loi d'échelle entre taux de cisaillement et fluctuations de vitesse faisant intervenir cet exposant β . Ce point semble bien avoir été mis en évidence dans l'étude expérimentale de [Losert00].

Moyennant des hypothèses de flux de chaleur nul à la paroi et à la surface libre, la résolution numérique sur plan incliné effectuée par [Bocquet02] indique un bon accord avec les simulations numériques, et prédit la courbe d'arrêt $H_{\text{stop}}(\theta)$. Il s'agit d'une transition dynamique vers l'arrêt, lorsque les fluctuations (créées par l'écoulement) ne sont pas suffisantes pour maintenir l'écoulement.

Ce dernier modèle montre que les dépendances en compacité près de la compacité maximale jouent un rôle crucial. Il est fondamental de les mesurer avec précision (voir par exemple [DaCruz02b]).

Notons que dans les modèles collisionnels précédents, le coefficient de frottement ne joue pas de rôle. Des modèles plus élaborés ont été développés pour prendre en compte l'effet du frottement intergrain [Abu-Zaid90, Jenkins02].

I.C. Modèles "frictionnel-collisionnel"

Nous avons rapidement évoqué les modèles frictionnels, dont le paramètre essentiel est l'angle de frottement interne (et la notion associée de seuil d'écoulement), et qui peuvent aussi décrire un effet de dilatance, mais pour lesquels la loi de comportement est indépendante du taux de cisaillement. Ensuite, nous avons développé les modèles collisionnels, qui décrivent une viscosité associée aux chocs, laquelle peut dépendre de la compacité et des fluctuations de vitesse, mais où les raisonnements sont généralement fondés sur des collisions binaires.

Nous allons maintenant décrire des approches mixtes, dans lesquelles le tenseur des contraintes s'écrit comme la somme d'une contribution frictionnelle, associée aux contacts maintenus (exposant «F»), et d'une contribution collisionnelle, associée aux chocs (exposant «C»). Les premières propositions dans ce sens ont été faites par [Savage83, Johnson87], et ont

été appliquées aux écoulements sur plan incliné [Johnson90, Anderson92, Ancey01] et en conduite verticale [Mohan97].

Au chapitre II §III.C.1, nous avons aussi décrit deux modèles susceptibles de rendre compte de l'hystérésis du seuil d'écoulement [Quartier00, Jaeger90]. Ces deux modèles proposent une expression de la contrainte de cisaillement (ou de la force de frottement) en fonction du taux de cisaillement, sous la forme de la somme de deux termes : un terme quadratique (de type Bagnold), et un terme dominant à faible taux de cisaillement associé à un mécanisme de piégeage (dissipation d'énergie lors de la chute dans un puits de potentiel). Dans le modèle de [Jaeger90], la force de frottement subie par un grain (et normalisée par son poids) s'écrit :

$$F(\dot{\gamma}) = a\dot{\gamma}^2 + \frac{\phi}{(1 + \dot{\gamma}^2)} \quad [\text{V.27}]$$

où ϕ est l'angle de frottement interne du matériau. Un tel modèle prévoit donc un comportement essentiellement dicté par les chocs aux forts taux de cisaillement, et essentiellement dicté par le frottement interne aux faibles taux de cisaillement.

I.C.1. Modèle diphasique

De façon générale, on va écrire :

$$\begin{cases} N = N^F + N^C \\ S = S^F + S^C \end{cases} \quad [\text{V.28}]$$

Le reproche généralement fait à ce type de modèle est qu'il est difficile (sinon impossible) d'associer à chacune de ces deux contributions des mécanismes élémentaires bien identifiés (un choc, un contact glissant...), ou même des populations de grains. Ceci constitue une différence importante avec la théorie cinétique pour laquelle il existe un passage « propre » de l'échelle microscopique des collisions binaires à l'échelle macroscopique du tenseur des contraintes. Nous sommes conscients de cette difficulté, mais nous voyons cette décomposition comme une manière de décrire des mécanismes complexes au sein de l'écoulement, difficilement réductibles à des événements élémentaires simples.

Nous avons donc à l'esprit l'image floue de populations non pas de grains, mais plutôt de contacts, pour lesquelles les expressions des composantes du tenseur des contraintes relèvent de chacune des deux descriptions (frictionnelle ou collisionnelle). On peut donc parler de modèle « diphasique ».

Les contraintes totales, sommes des deux contributions, sont fixées par l'équation de conservation de la quantité de mouvement (Eq.V-1). Pour pouvoir progresser, nous avons besoin d'une hypothèse sur la façon dont se répartissent les deux populations, ou encore les deux contributions aux contraintes. Diverses hypothèses ont été formulées dans la littérature [Johnson87, Coussot00, Aranson01a et 01b, Lemaître02], et nous reviendrons à la fin de cette partie sur certains de ces modèles.

Pour notre part, nous voulons défendre l'idée que cette répartition dépend essentiellement de la compacité. Lorsque le milieu est très dense, c'est la contribution frictionnelle qui va dominer, et lorsque le milieu est de plus en plus dilué, c'est la contribution collisionnelle qui va l'emporter. Elle pourrait aussi dépendre de caractéristiques propres au matériau granulaire (coefficients de restitution et de frottement), mais en tout cas elle ne dépendrait pas explicitement du taux de cisaillement ou de la pression. La valeur de la compacité elle-même doit être prédite par le modèle. On introduit donc une fonction $g(v)$ qui décrit cette répartition :

$$\frac{N^F}{N} = g(v) \quad \text{ou} \quad \frac{N^C}{N} = 1 - g(v) \quad [\text{V.29}]$$

Cette fonction n'est pas connue (mais pourrait être déterminée à travers des expériences ou des simulations numériques sur des systèmes simples, voir [daCruz02b]). Elle doit tendre vers 1 lorsque v tend vers 1, et vers 0 lorsque v tend vers 0. Dans la suite, afin de pouvoir mener les calculs, nous adopterons une forme simple pour $g(v)$, compatible avec les arguments précédents (voir Figure V-5) :

$$g(v) = \begin{cases} \frac{v - v_c}{1 - v_c} & \text{pour } v > v_c \\ 0 & \text{pour } v < v_c \end{cases} \quad [\text{V.30}]$$

v_c est une compacité caractéristique sous laquelle le comportement du milieu est purement collisionnel.

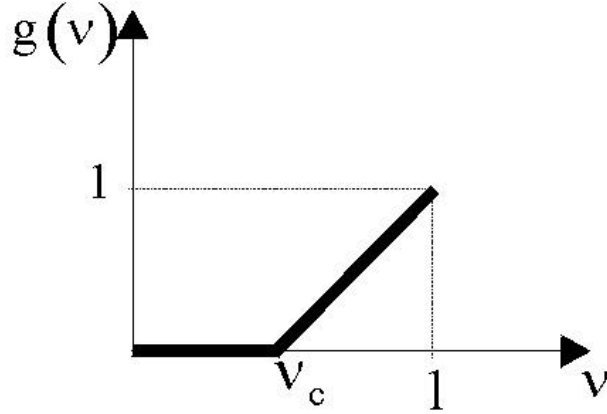


Figure V-5 : Schéma pour la fonction de répartition $g(\mathbf{n})$.

Enfin, pour la contribution frictionnelle, on écrit le critère d'écoulement :

$$S^F = \phi^F N^F \quad [\text{V.31}]$$

avec ϕ^F l'angle de frottement interne du matériau.

I.C.2. Dilatance

Sur un plan incliné où $S = \theta N$, les équations précédentes prédisent la valeur suivante pour la compacité :

$$v = g^{-1} \left(\frac{\frac{S^c}{N^c} - \theta}{\frac{S^c}{N^c} - \phi^F} \right) \quad [\text{V.32}]$$

L'écoulement ne peut se produire que pour $\theta \geq \phi^F$, avec une dilatation du matériau lorsque l'inclinaison augmente. Dans le cadre du modèle simple pour $g(v)$, on prédit que :

$$v = 1 - \frac{(1 - v_c)}{\left(\frac{S^c}{N^c} - \phi^F \right)} (\theta - \phi^F) \quad [\text{V.33}]$$

Par ailleurs, le milieu étant de compacité constante, on peut écrire :

$$S^C(y) = A(\theta)(H - y) \quad [\text{V.34}]$$

$$\text{avec } A(\theta) = (\theta - \phi^F g(v))v \quad [\text{V.35}]$$

I.C.3. Contribution collisionnelle

Pour poursuivre, il faut adopter un modèle pour les contraintes collisionnelles. Nous allons successivement examiner les deux modèles que nous avons passés en revue au §I.B : sans fluctuations de vitesse, puis avec fluctuations de vitesse.

I.C.3.a. Sans fluctuations de vitesse

Compte-tenu de la discussion du §I.B.a, on adopte l'expression suivante pour la contrainte de cisaillement :

$$S^C(\dot{\gamma}) = F_s(v) \left(\dot{\gamma} + \frac{\dot{\gamma}^2}{\dot{\gamma}_c(y)} \right) \quad [\text{V.36}]$$

où F_s est lié au coefficient de frottement du matériau (Eq.V.9), et $\dot{\gamma}_c(y)$ est d'ordre 1 loin de la paroi, et augmente à proximité de la paroi.

Il faut par ailleurs une expression pour la contrainte normale. Comme pour la partie frictionnelle, on propose d'écrire qu'elle est proportionnelle à la contrainte de cisaillement, à travers un angle de frottement, cette fois-ci associé aux collisions, que l'on note ϕ_c :

$$S^C = \phi^C N^C \quad [\text{V.37}]$$

On peut le voir comme l'angle de frottement dynamique du modèle de Bagnold, que nous avons décrit au chapitre I §V.B, et qui s'interprétait comme l'angle d'impact moyen. Ce deuxième angle de frottement n'a pas de raison d'être égal à l'angle de frottement interne ϕ_F .

Nous faisons l'hypothèse que $\phi_c > \phi_F$, et nous posons $\Delta\phi = \phi^C - \phi^F$. Pour une inclinaison supérieure à ϕ_c , le modèle ne s'applique plus. La dilatance a l'expression simple suivante :

$$v = 1 - \frac{(1 - v_c)}{\Delta\phi} (\theta - \phi^F) \quad [\text{V.38}]$$

Par ailleurs :

$$A(\theta) = \frac{\phi^C}{\Delta\phi} (\theta - \phi^F) v \approx \frac{\phi^C}{\Delta\phi} (\theta - \phi^F) \quad [\text{V.39}]$$

car la variation de la compacité reste faible.

I.C.3.b. Avec fluctuations de vitesse

On adopte l'expression de la théorie cinétique, dans la limite dense (Eq.V.14) :

$$\begin{cases} N^C(v, T) = B_N G(v) T \\ S^C(v, T) = B_S G(v) T^{1/2} \dot{\gamma} \end{cases} \quad [\text{V.40}]$$

Il est alors possible d'éliminer la température de sorte que :

$$\dot{\gamma}(y) = K(v) (\theta - \phi^F g(v)) \sqrt{H - y} \quad [\text{V.41}]$$

$$\text{avec } K(v) = \sqrt{\frac{B_N}{B_S^2}} \sqrt{\frac{v}{G(v)(1 - g(v))}} \quad [\text{V.42}]$$

Dans la limite $e = 0$, le préfacteur vaut environ 6. Par ailleurs, si l'on utilise la forme simple pour $g(v)$, on s'aperçoit que la dépendance en compacité disparaît : $K \approx 6 (1 - v_c)^{-1/2}$.

Cependant, la compacité reste indéterminée dans cette analyse. Comme en théorie cinétique, il faudrait résoudre l'équation d'énergie, modifiée pour prendre en compte la contribution frictionnelle.

I.C.4. Profil de vitesse et loi d'échelle

I.C.4.a. Sans fluctuations de vitesse

On pose :

$$C(\theta) = \frac{A(\theta)}{F_s(v)} \quad [\text{V.43}]$$

On distinguera dans la suite deux cas :

Cas A :

$$F_s \approx \mu \Rightarrow C(\theta) \approx \frac{\phi^c}{\mu \Delta \phi} (\theta - \phi^F) \quad [\text{V.44}]$$

Cas B :

$$F_s(v) = \frac{B_s}{1-v} \Rightarrow C(\theta) \approx \frac{(1-v_c)\phi^c}{B_s \Delta \phi^2} (\theta - \phi^F)^2 \quad [\text{V.45}]$$

On remarquera que l'ordre de grandeur maximal de $C(\theta)$ est ϕ^c / μ ou $(1-v_c)\phi^c / B_s$.

Le calcul, à partir des Eq.V.34-36 donne l'expression suivante pour le taux de cisaillement :

$$\dot{\gamma}(y) = \dot{\gamma}_c(y) \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4C(\theta)(H-y)/\dot{\gamma}_c(y)}}{2} \right) \quad [\text{V.46}]$$

La prise en compte d'une dépendance en y du taux de cisaillement critique n'admet pas de solution analytique. Nous donnons simplement une solution numérique sur la Figure V-6.

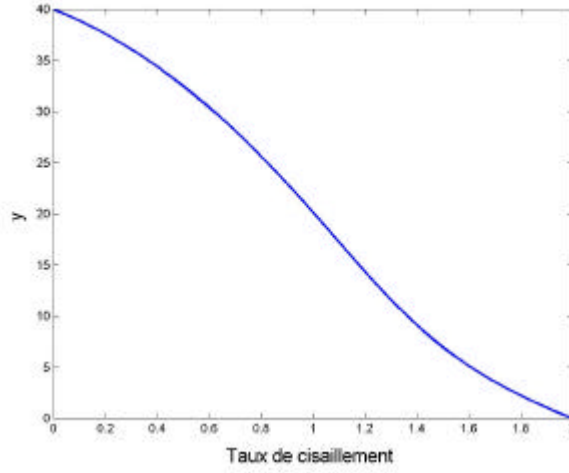


Figure V-6 : Profil de taux de cisaillement ($\dot{\gamma}_c(y) = 1 + e^{-y/5}$, $C = 0,1$, $H = 40$).

Nous nous restreignons dans la suite au cas d'un taux de cisaillement constant égal à 1. Dans ce cas, en posant :

$$\lambda(\theta) = H + \frac{1}{4C(\theta)} \quad [\text{V.47}]$$

On obtient l'expression suivante du profil de vitesse :

$$u(y) = \frac{2}{3} \lambda(\theta)^{3/2} C(\theta)^{1/2} \left(1 - \left(1 - \frac{y}{\lambda(\theta)} \right)^{3/2} \right) - \frac{y}{2} \quad [\text{V.48}]$$

et pour la vitesse moyenne :

$$V(H, \theta) = -\frac{H}{4} + \frac{2}{3} \frac{\lambda(\theta)^{5/2} C(\theta)^{1/2}}{H} \left[\frac{H}{\lambda(\theta)} + \frac{2}{5} \left(-1 + \left(1 - \frac{H}{\lambda(\theta)} \right)^{2/5} \right) \right] \quad [\text{V.49}]$$

Nous traçons sur la figure V.7 la dépendance de cette vitesse moyenne en fonction de l'inclinaison réduite $(\theta - \phi^F) / \Delta\phi$, et de H , dans les deux modèles pour $\phi^C / \mu = 1$ et $(1 - v_c) \phi^C / B_s = 1$. Les deux modèles donnent une dépendance en $H^{3/2}$. Seul le modèle B donne une dépendance linéaire en inclinaison.

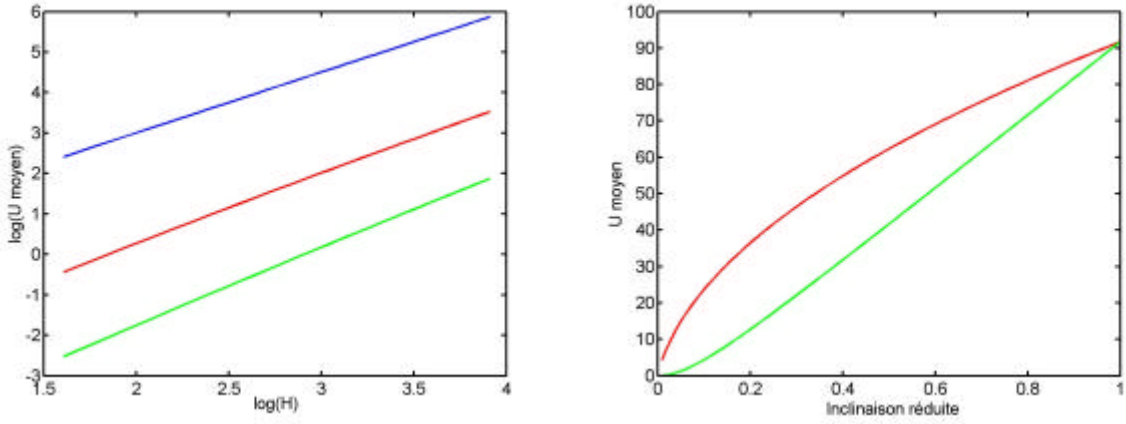


Figure V.7 : Loi d'échelle dans le modèle frictionnel-collisionnel. Cas A en rouge Cas B en vert. En bleu la loi d'échelle en $H^{3/2}$

La limite où $4C(\theta)H \gg 1$ correspond au cas où la contrainte de cisaillement est dominée par le terme quadratique. On est alors dans un régime que l'on peut qualifier de « Bagnold-Coulomb ». Le profil de vitesse peut alors être approximé par :

$$u(y) = \frac{2}{3} C(\theta)^{1/2} H^{3/2} \left(1 - \left(1 - \frac{y}{H} \right)^{3/2} \right) \quad [\text{V.50}]$$

On trouve donc la dépendance observée dans nos simulations numériques ou celles de [Silbert01], lorsque l'on n'est pas trop proche du socle. La vitesse moyenne peut être approximée par :

$$V(\theta, H) = \frac{2}{5} C(\theta)^{1/2} H^{3/2} \quad [\text{V.51}]$$

Dans les deux modèles « A » et « B », ceci donne :

$$V^A(\theta, H) = \frac{2}{5} \left(\frac{\phi^C}{\mu} \right)^{1/2} \left(\frac{\theta - \phi^F}{\Delta\phi} \right)^{1/2} H^{3/2} \quad [\text{V.52}]$$

$$V^B(\theta, H) = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{(1 - v_c) \phi^C}{B_s}} \left(\frac{\theta - \phi^F}{\Delta\phi} \right) H^{3/2} \quad [\text{V.53}]$$

On remarque que dans le modèle « B », la loi d'échelle est conforme à ce qui est observé.

I.C.4.b. Avec fluctuations de vitesse

A partir des Eq.V.34, 35, 41 et 42, on obtient l'expression suivante du profil de vitesse et de la vitesse moyenne (la compacité restant à déterminer) :

$$u(y) = \frac{2}{3} K (\theta - \phi g(v)) H^{3/2} \left(1 - \left(1 - \frac{y}{H} \right)^{3/2} \right) \quad [V.54]$$

$$V(\theta, H) = \frac{2}{5} K (\theta - \phi g(v)) H^{3/2} \quad [V.55]$$

La loi d'échelle discutée au chapitre III fait intervenir l'épaisseur d'arrêt. Cependant, lorsque l'inclinaison reste proche de l'inclinaison ϕ pour laquelle l'épaisseur d'arrêt diverge, la loi d'échelle prend la forme plus simple (observée par [Azanza98]) :

$$V(\theta, H) = \alpha (\theta - \phi) H^{3/2} \quad [V.56]$$

Le préfacteur est de l'ordre de 0,2 à 0,5 dans les divers systèmes étudiés. C'est ce préfacteur qui doit être comparé avec celui qui intervient dans les expressions V.53 et V.55. La comparaison reste difficile dans la mesure où certains paramètres restent indéterminés.

I.C.5. Conclusion et autres modèles

En conclusion, un modèle frictionnel-collisionnel est susceptible de rendre compte au moins qualitativement de plusieurs observations : une plage d'écoulement stationnaire uniforme, la dilatance du matériau lorsque l'inclinaison augmente, un profil de vitesse de type Bagnold, avec une augmentation du taux de cisaillement près de la paroi, une loi d'échelle en inclinaison et épaisseur. Cependant, un certain nombre d'hypothèses (réalistes) ont dû être faites : répartition des contributions frictionnelle et collisionnelle, angle de frottement collisionnel... et le modèle dépend d'un certain nombre de paramètres qui ne sont pas prédits : $\phi^F, \phi^C, B_s, \dot{\gamma}_c(y)$. Par contre, un tel modèle ne décrit pas la courbe $H_{stop}(\theta)$.

Avant de conclure cette partie sur les modèles frictionnel-collisionnel, nous voulons citer d'autres approches proposées dans un esprit voisin.

Le modèle de [Coussot00] est un modèle où la compacité joue un rôle dominant. La transition entre l'écoulement et l'arrêt a pour conséquence un saut de compacité. Un bilan d'énergie permet de prédire une épaisseur d'arrêt, de calculer le profil de vitesse et de retrouver une loi d'échelle pour la vitesse moyenne analogue à celle mise en évidence par Pouliquen.

Dans le modèle de [Aranson01a et 01b], le matériau est décrit comme un mélange de grains dans un état solide et de grains dans un état fluide. La concentration relative de ces deux populations est décrite par un paramètre d'ordre local égal à 1 lorsque l'ensemble du matériau est dans l'état solide et par 0 lorsqu'il est dans un état entièrement fluidisé. Le paramètre d'ordre est régi par une équation de type Landau, par analogie avec la description des transitions de phase. Les contraintes sont la somme d'une partie newtonienne (liquide visqueux) et d'une partie proportionnelle au paramètre d'ordre (phase solide). Cette approche permet de rendre compte de l'hystérésis du seuil d'écoulement. Elle donne également de bonnes prévisions quant aux profils de vitesse dans les expériences de cellules de cisaillement et en tambour tournant.

Le modèle de [Lemaître 2001] est fondé sur la décomposition en deux populations de grains (agrégats de grains cisailés vers la droite ou vers la gauche). Le taux de transition d'un état à l'autre est gouverné par les fluctuations du mouvement. Appliqué aux écoulements sur plan incliné ce modèle prédit correctement l'épaisseur d'arrêt.

Dans le modèle frictionnel-collisionnel originellement proposé par [Savage83] puis repris par [Johnson87], la contrainte frictionnelle normale est décrite comme une fonction intrinsèque de la compacité :

$$N^F(v) = \begin{cases} A \log\left(\frac{1-v_c}{1-v}\right) & \text{si } v > v_c \\ 0 & \text{si } v < v_c \end{cases} \quad [\text{V.57}]$$

Ce choix conduit, pour un tas au repos sous gravité, au profil de compacité suivant:

$$v = \frac{1}{1 + \exp(\frac{y-H}{A})} \quad [V.58]$$

Remarquons que l'on retrouve là, de façon inattendue, une solution de type distribution de Fermi-Dirac : H et A jouent respectivement le rôle de niveau de Fermi et de température.

Enfin, le modèle récemment proposé par [Savage98] est un modèle de plasticité avec de grandes fluctuations du taux de cisaillement (considérées comme l'analogie de la température granulaire). Quand ces fluctuations sont plus grandes que la moyenne, un comportement visqueux est obtenu. Ceci conduit à un ensemble d'équations hydrodynamiques semblables à celles de la théorie cinétique mais avec une viscosité qui diminue avec la température. Les Eq.V-10 et 11 de la théorie cinétique deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = N^F(v) + A_N F(v) T \\ S = \frac{A_s}{A_N} \frac{N}{T^{1/2}} \dot{\gamma} \\ Q = -\frac{A_Q}{A_N} \frac{N}{T^{1/2}} T' \\ I = \frac{A_I}{A_N} N T^{1/2} \end{array} \right. \quad [V.59]$$

avec la contrainte normale frictionnelle (V-57). On s'aperçoit que l'équation d'énergie est tout à fait semblable à celle du modèle purement collisionnel (Eq.V.18,19), ainsi que la relation entre taux de cisaillement et fluctuations de vitesse (Eq.V.16). Seule l'équation pour la compacité est affectée. Ce modèle a été utilisé pour décrire les écoulements en conduite verticale.

I.D. Modèles non-locaux

Dans les modèles précédents, la loi de comportement est locale, c'est à dire que la contrainte de cisaillement en un point ne dépend que du taux de cisaillement en ce même point via une viscosité qui ne dépend que des grandeurs (compacité, fluctuations de vitesse) en ce point. Cependant, dans un milieu dense, il existe un réseau de contact qui peut propager

les forces. On ne peut retenir l'approximation simple de chocs binaires. Il faut tenir compte des mouvements corrélés des grains. Certains modèles ont donc proposé une loi de comportement non locale. Déjà, cette idée de propagation des impulsions dans un milieu dense, et donc de dissipation non-locale, a permis d'expliquer l'observation d'un coefficient de restitution effectif très faible pour un milieu dense [Bernu90, McNamara94], et cette idée a été utilisée par [Rajchenbach02] pour décrire les écoulements à surface libre : en écrivant que l'énergie cinétique gagnée par un grain lorsqu'il roule sur un grain de la couche inférieure est perdue lors du prochain choc qui est complètement inélastique par l'argument précédent, il apparaît que le taux de cisaillement doit être constant dans la couche, d'ordre $(\theta - \phi)$ où ϕ est l'angle de frottement interne.

I.D.1. Mouvement de colonnes

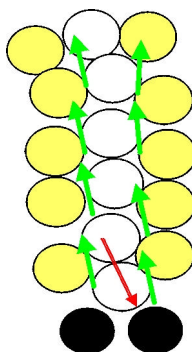


Figure V-8 : Mouvement de colonne de grains frottant au sein de l'écoulement.

Une première idée, formulée par Jenkins et Chevoir [Jenkins01], part de l'observation expérimentale de [Azanza98] de mouvements corrélés de colonnes de grains. Le matériau est considéré comme structuré en couches qui glissent les unes sur les autres, comme dans l'analyse de Bagnold. Les grains interagissent par des contacts maintenus et des chocs frottants. Le mouvement élémentaire se décompose en trois phases : un grain commence par « escalader » le grain de la couche inférieure, à travers un contact glissant, puis il tombe sous l'effet de la gravité dans l'interstice entre les deux grains de la couche inférieure, et heurte alors le grain suivant. En accord avec le constat de [Azanza98, Dippel99] et ce qui vient d'être dit sur la dissipation non locale, on considère que le coefficient de restitution effectif dans le choc est nul. Par ailleurs, en accord avec les observations du chapitre III §V.B, on utilisera un coefficient de frottement effectif pour décrire la mobilisation du frottement moyenne dans les contacts. Les composantes normales et tangentielles de la force exercée sur un grain du fait de l'interaction avec la couche inférieure se décomposent en deux

contributions associées à la phase de contact maintenu et au choc. Comme dans le modèle frictionnel-collisionnel, on pourra donc écrire :

$$\begin{cases} N = N^F + N^C \\ S = S^F + S^C \end{cases} \quad [\text{V.60}]$$

Mais il s'agit là de forces et non de contraintes. On utilisera deux coefficients de frottement effectifs pour le rapport entre les contributions tangentielles et normales :

$$S^F = \phi^F N^F \text{ et } S^C = \phi^C N^C \quad [\text{V.61}]$$

Enfin, dans un écoulement stationnaire uniforme sur un plan incliné, le rapport des deux composantes totales est égale à l'inclinaison θ . Ceci fournit donc la relation suivante :

$$N^C = \frac{\theta - \phi^F}{\Delta\phi} N \quad [\text{V.62}]$$

La force normale totale est égale au poids d'une colonne de grains, soit en normalisant les forces par le poids d'un grain mg , et les distances par la taille d'un grain d , $N = H-y$. Pour poursuivre, il faut exprimer la force normale associée aux chocs. Celle-ci est égale au produit de la fréquence des chocs, égale au taux de cisaillement, par la percussion normale P :

$$N^C = P\dot{\gamma} \quad [\text{V.63}]$$

Quant à la percussion normale, elle est égale à la discontinuité de vitesse normale dans le choc. Celui-ci étant considéré comme complètement inélastique, elle est égale à la quantité de mouvement normale lors de l'impact. Le grain de masse m tombe sous l'effet de la gravité g dans l'interstice h entre les deux grains de la couche inférieure, soit en fonction de la vitesse de chute $v_{ch} = (2h)^{1/2} \approx 1/2$ (Cf. § I.B.a) $P = v_{ch}$. Ceci correspond à la limite du régime gravitaire décrit au §I.B.a. On obtient donc finalement :

$$\dot{\gamma}(y) \approx 2 \frac{\theta - \phi^F}{\Delta\phi} (H - y) \quad [\text{V.64}]$$

L'hypothèse qui est introduite à ce stade est qu'il faut considérer non pas la chute d'un grain isolé, mais la chute de toute la colonne située au dessus du grain. Ceci ne change pas la

discontinuité de vitesse dans le choc, mais la masse et donc la percussion sont multipliées par un facteur $H-y$. En conséquence, le taux de cisaillement devient :

$$\dot{\gamma}(y) \approx 2 \frac{\theta - \phi^F}{\Delta\phi} \quad [\text{V.65}]$$

Cette fois-ci, le taux de cisaillement est constant dans toute la couche, comme dans le modèle de dissipation non-locale de [Rajchenbach02]. Le profil de vitesse est linéaire ce qui est une prédiction raisonnable pour les écoulements peu épais. La dépendance en inclinaison est correcte, mais non la dépendance en épaisseur. C'est ce qui conduit à prendre en compte un effet de freinage de la colonne lors de sa chute. Sans rentrer dans le détail du modèle, on indique que ceci conduit à un facteur correctif en $(1-(H-y)/\lambda)^{1/2}$, où λ est une longueur de freinage, d'où le profil de vitesse :

$$u(y) = \frac{4\phi^C\lambda}{\Delta\phi} (\theta - \phi^F) \left(\left(1 - \frac{H-y}{\lambda} \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{H}{\lambda} \right)^{1/2} \right). \quad [\text{V.66}]$$

$$V(\theta, H) = \frac{8\phi^C\lambda}{3\Delta\phi} (\theta - \phi^F) \left(\frac{1 - (1 + H/2\lambda)(1 - H/\lambda)^{1/2}}{H/\lambda} \right) \quad [\text{V.67}]$$

Cette fois-ci, le profil de vitesse présente une légère concavité comparable aux observations, et la vitesse moyenne est proportionnelle à $H^{3/2}$ pour H compris entre $0,3 \lambda$ et $0,8 \lambda$ (voir figure V - 9) .

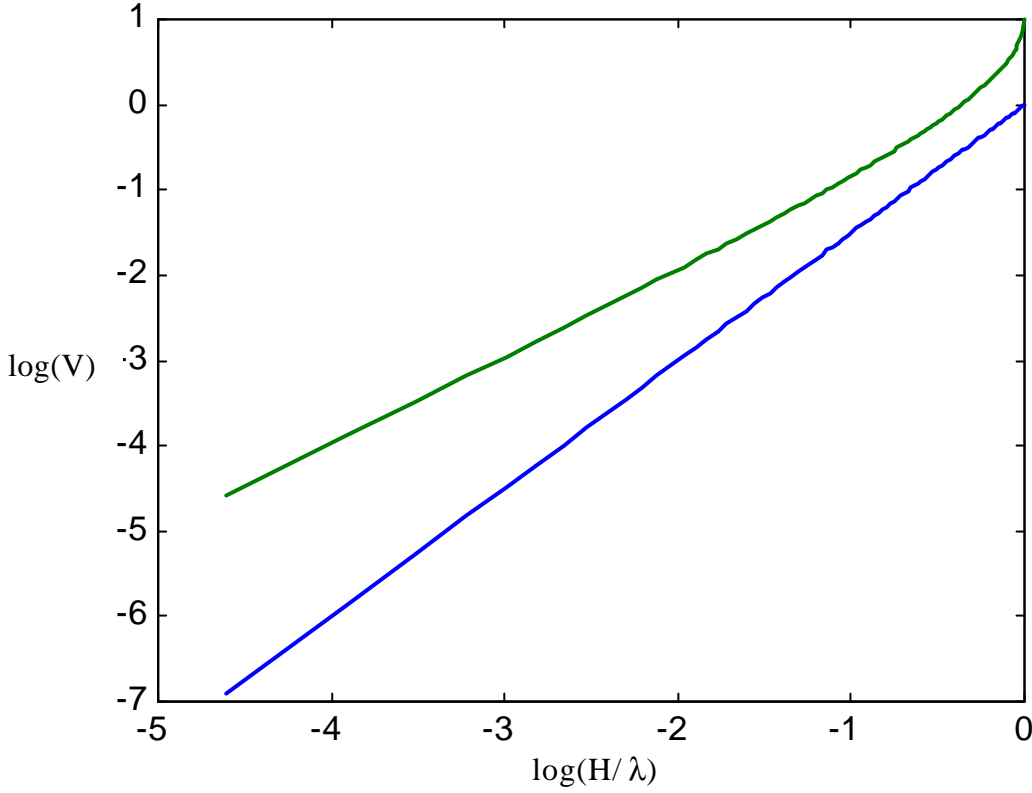


Figure V – 9 : Dépendance en H de la vitesse moyenne. On a tracé la dépendance du facteur entre parenthèse de la formule V-67 en fonction de $x = H/I$. En vert, la dépendance en $(H/I)^{3/2}$.

I.D.2. Transition de connexité

Dans le modèle proposé par [Mills99 et 00, Bonamy02c], le milieu granulaire en écoulement est décrit comme un fluide visqueux dans lequel est plongé un réseau transitoire de grains en contact, propageant les contraintes au travers de la couche d'une manière non-locale. La contrainte collisionnelle s'écrit alors comme la somme d'un terme local σ , associé aux chocs entre grains et d'un terme non-local σ^{NL} , correspondant à la transmission des contraintes à travers le réseau de contacts, et écrit dans le modèle initial sous la forme :

$$\sigma^{\text{NL}}(y) = \frac{1}{\xi} \int_y^H \sigma(t) dt \quad [\text{V.68}]$$

où ξ désigne la densité des chaînes de force . Plus précisément, $1/\xi$ la distance moyenne entre chaînes de force.

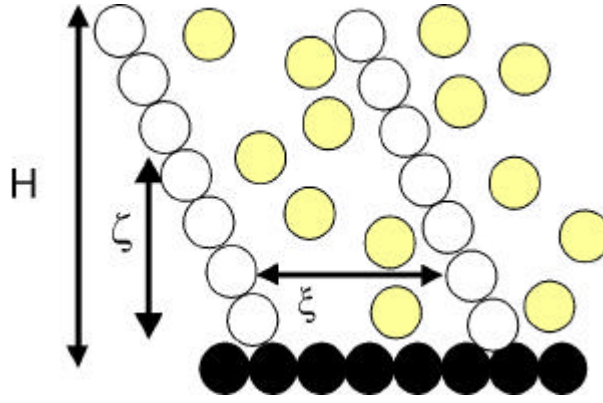


Figure V - 10 : Schéma du réseau de contact.

Ayant à l'esprit un modèle de percolation pour décrire la transmission des forces à travers le réseau des contacts, nous proposons avec Pierre Mills une version amendée de ce modèle, en introduisant une deuxième longueur caractéristique, ζ , associée à la connexité du réseau (voir figure V-10). Nous avons ainsi deux longueurs caractéristiques d'un problème de percolation. La deuxième longueur est aussi une longueur de corrélation. Cette longueur est petite pour un milieu dilué et diverge pour un milieu dense. On suppose que l'on peut décrire la probabilité de connexion par une fonction exponentielle $\exp(-y/\zeta)$. On écrit donc le terme non local sous la forme :

$$\sigma^{\text{NL}}(y) = \frac{1}{\xi} \int_y^H \sigma(t) \exp\left(-\frac{t-y}{\zeta}\right) dt \quad [\text{V.69}]$$

de sorte que la contrainte collisionnelle totale s'écrit :

$$S^{\text{C}}(y) = \sigma(y) + \frac{1}{\xi} \int_y^H \sigma(t) \exp\left(-\frac{t-y}{\zeta}\right) dt \quad [\text{V.70}]$$

Les deux longueurs ne dépendent que de la compacité. En milieu infini, le seuil de percolation (v^*) correspond à la compacité de l'empilement désordonné lâche (soit $v = 1$). Par contre, dans une couche d'épaisseur H , il sera important de prendre en compte des effets de taille finie [Mills02], mais ceci ne sera pas fait ici. En conséquence, on reste toujours en dessous du seuil de percolation et :

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{(1-v)^\beta} \quad [\text{V.71}]$$

où β est un exposant de percolation ("brassée"), dont la valeur serait comprise entre 0,5 et 1. En prenant en compte toutes les forces (quelle que soit leur intensité, on pourrait aussi imaginer de se restreindre au réseau des forces fortes). ξ peut être estimé simplement à partir de la coordinance z et de la compacité. On trouve alors :

$$\xi = \frac{\pi}{2z\nu_m} \quad [\text{V.72}]$$

Ainsi ξ tend vers 0,5 ($z = 4$) au seuil de percolation, et augmente comme l'inverse de la coordinance lorsque la compacité diminue (cf. figure III-37). Des considérations de géométrie statistique, permettent aussi d'écrire :

$$\xi = \frac{1}{\nu\zeta} + \frac{1}{\nu^*} \quad [\text{V.73}]$$

Au voisinage du seuil de percolation, on écrira donc :

$$\xi = \frac{1}{\zeta_0}(1-\nu)^\beta + \xi_0 \quad [\text{V.74}]$$

avec ξ_0 entre 0,5 et 1.

Ces deux longueurs varient notablement au voisinage de la transition de percolation. Dans la limite dense : $\xi \rightarrow \xi_0$, $\zeta \rightarrow \infty$, et dans la limite diluée : $\xi \rightarrow \infty$, $\zeta \rightarrow 0$.

On fait l'hypothèse d'un milieu homogène (compacité constante) de sorte que les deux longueurs de percolation sont constantes dans la couche. Par contre, la compacité, et à travers elle les longueurs de percolation, dépend de l'inclinaison. Pour poursuivre le calcul, nous adoptons les mêmes hypothèses qu'aux § I.C.a et b. On écrit toujours une décomposition entre contributions frictionnelle et collisionnelle (Eq.V.28) avec une fonction de répartition $g(\nu)$ (Eq.V.29), pour laquelle nous choisirons la forme simple (Eq.V.30). Alors la contrainte collisionnelle s'écrit (cf. Eq.V.34-45) :

$$S^c(y) = A(\theta)(H-y) \quad [\text{V.75}]$$

$$\text{avec } A(\theta) = (\theta - \phi^F g(v))v \quad [\text{V.76}]$$

On conserve par ailleurs l'hypothèse de l'angle de frottement collisionnel pour décrire le rapport entre contrainte collisionnelle tangentielle et normale, ce qui conduit à la prédiction suivante pour la dilatance (cf. Eq.V.38 et 39) :

$$v = 1 - \frac{(1 - v_c)}{\Delta\phi} (\theta - \phi^F) \quad [\text{V.77}]$$

$$A(\theta) = \frac{\phi^C}{\Delta\phi} (\theta - \phi^F) v \approx \frac{\phi^C}{\Delta\phi} (\theta - \phi^F) \quad [\text{V.78}]$$

Dans la suite, on pose :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\zeta} \quad [\text{V.79}]$$

La limite dense correspond à $\lambda = \xi_0$, et la limite diluée correspond à $\lambda = \zeta$.

En dérivant l'Eq. (V.70), on obtient l'équation vérifiée par σ :

$$\sigma' - \frac{\sigma}{\lambda} = -A(\theta) \left(1 + \frac{H-y}{\zeta}\right) \quad [\text{V.80}]$$

dont la solution générale est :

$$\sigma(y) = A(\theta) \lambda \left(\frac{H-y}{\zeta} + \frac{\lambda}{\xi} \left(1 - \exp\left(\frac{y-H}{\lambda} \right) \right) \right) \quad [\text{V.81}]$$

Les solutions dans les limites diluée et dense sont:

$$\sigma(y) \approx A(\theta) (H-y) \quad [\text{V.82}]$$

$$\sigma(y) = A(\theta) \xi_0 \left(1 - \exp\left(\frac{y-H}{\xi_0} \right) \right) \quad [\text{V.83}]$$

La limite dense correspond au modèle initial de Pierre Mills. Sur la figure V-11, on a tracé le profil de contrainte locale σ (normalisé par A) en fonction de $(\theta - \phi^F)/\Delta\phi$. On a choisi $\xi_0 = 1$, $\zeta_0 = 1$, $\beta = 1$, $\phi^C = 30^\circ$ et $H=40$.

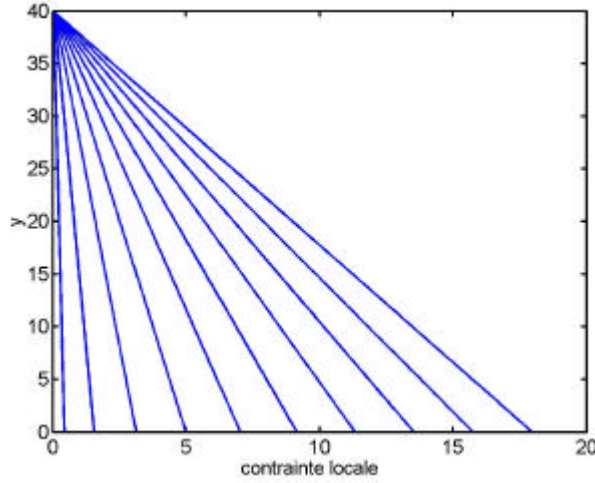


Figure V – 11 : Profil de contrainte local.

Pour pouvoir prédire le profil de vitesse, il faut se donner une expression de la contrainte de cisaillement locale, en fonction du taux de cisaillement. On choisit l'expression suivante (type Bagnold) :

$$\sigma = \frac{A_s \dot{\gamma}^2}{1 - v} \quad [\text{V.84}]$$

ce qui conduit à l'expression suivante pour le taux de cisaillement :

$$\dot{\gamma}(y) = \frac{(\theta - \phi^F)}{\Delta\phi} \sqrt{\frac{\phi^C (1 - v_c)}{A_s}} \sqrt{\lambda \left(\frac{H - y}{\zeta} + \frac{\lambda}{\xi} \left(1 - \exp\left(\frac{y - H}{\lambda} \right) \right) \right)} \quad [\text{V.85}]$$

Le profil de vitesse puis la vitesse moyenne sont ensuite obtenus numériquement. On a tracé sur la figure V-12 le profil de taux de cisaillement en fonction de $(\theta - \phi^F)/\Delta\phi$, au préfacteur $\sqrt{\phi^C (1 - v_c)}/A_s$ près. On a choisi $\xi_0 = 1$, $\zeta_0 = 1$, $\beta = 1$, $\phi^C = 30^\circ$ et $H = 40$. Sur la figure V-13,

on a tracé les dépendances de la vitesse moyenne en fonction de l'inclinaison et de l'épaisseur.

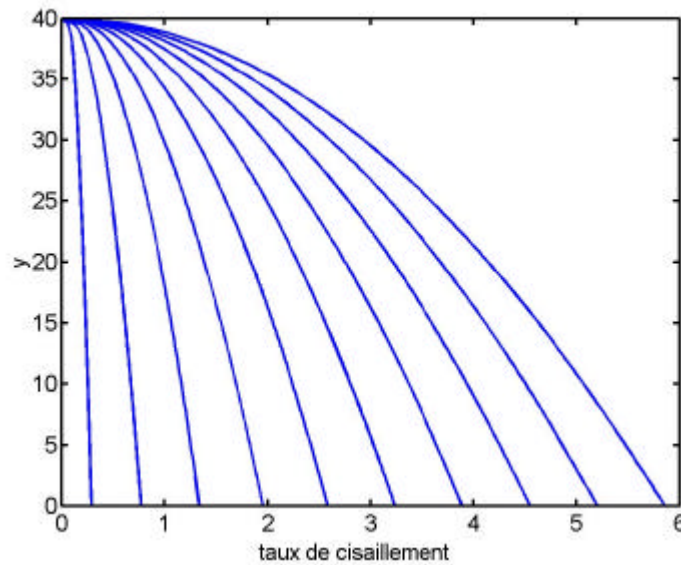


Figure V-12 : Profil du taux de cisaillement

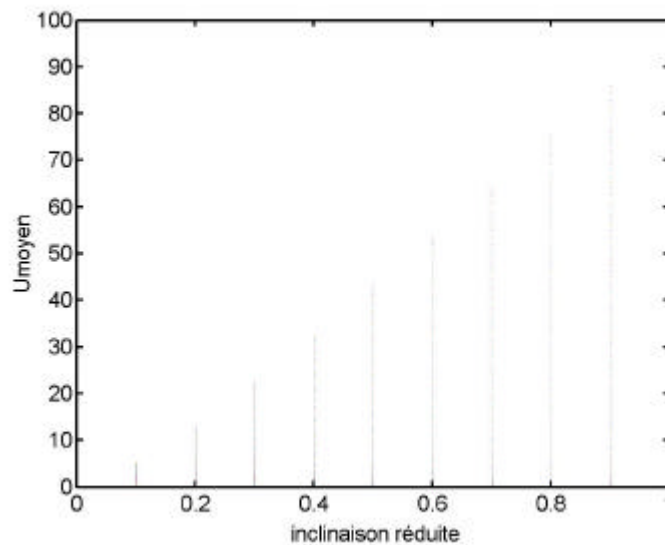


Figure V-13 : Dépendance de la vitesse moyenne avec la hauteur et l'inclinaison.

La prise en compte d'effets de taille finie (épaisseur de la couche) dans ce modèle de percolation a été étudiée par P. Mills et F. Chevoir [Mills02]. Ceci permet de délimiter la gamme des régimes dominés par le terme non-local et d'analyser le comportement près de l'arrêt. Elle décrit bien l'arrêt du matériau pour une épaisseur critique, fonction de l'inclinaison, qui s'interprète comme la longueur de corrélation du réseau de contact.

Citons enfin une autre approche non-locale proposée par [Andreotti01a]. Partant de l'analyse du mouvement d'un grain isolé [Quartier00] (voir chapitre II § II.C.1), l'écoulement d'une couche granulaire est décrit comme un empilement de couches roulant sans glisser les unes sur les autres. Ce modèle intègre la notion de dissipation non-locale lors des chocs et de piégeage. Il permet de décrire le fluage observée sur socle meuble.

I.E. Processus activés

Une autre approche consiste à considérer les écoulements granulaires comme des "processus activés". Le concept de processus thermiquement activé a été appliqué avec succès pour expliquer de nombreux phénomènes physiques, en particulier la viscosité des liquides (Eyring). L'idée est que les fluctuations thermiques aident les particules emprisonnées dans un puits de potentiel énergétique à s'en échapper. Toutefois, les fluctuations thermiques sont négligeables dans les matériaux granulaires. [Pouliquen96] a proposé de considérer les fluctuations de contraintes comme source d'activation. Ce modèle a fourni une prédiction réaliste de la localisation du cisaillement près des parois d'une conduite verticale. Une idée analogue a été utilisée pour décrire la localisation du cisaillement dans une mousse liquide (les bulles jouant le rôle des grains) placée dans une cellule de Couette [Debregeas02]. [Pouliquen01] a proposé une version non-locale de ce modèle activé, en considérant que le cisaillement en un point peut activer le cisaillement en un autre point.

I.F. Conclusion

On constate donc une floraison de modèles dans les toutes dernières années, fondés sur des idées originales pour décrire les écoulements denses : divergence anormale de la viscosité, caractère non-local de la propagation des forces dans le milieu, processus activés... Nous avons tenté de les classer (frictionnel, collisionnel, avec ou sans fluctuations de vitesse, local ou non local), mais l'ensemble peut sembler encore assez touffu. De nombreuses pistes donnent des prédictions intéressantes, au moins d'un point de vue qualitatif. On commence à trouver des modèles qui prédisent la gamme des écoulements, en particulier l'épaisseur d'arrêt, ou bien la loi d'échelle, ou encore la dilatance. Il n'existe pas encore de modèle qui prédise à la fois tous les effets observés, ou qui le fasse de façon quantitative. Il faut donc

encore un peu de temps pour mesurer les paramètres introduits dans certains de ces modèles et pour confronter les prédictions de ces modèles à des expériences et/ou à des simulations numériques dans plusieurs géométries (au moins les quatre configurations présentées sur la figure II-1). Des données expérimentales et numériques sont maintenant disponibles dans les quatre configurations pour les profils de vitesse et de compacité, de sorte que des comparaisons précises soient possibles.

II. Micromécanique

Dans cette seconde partie, nous allons montrer comment il est possible d'interpréter certaines informations micromécaniques mesurées dans les simulations numériques et décrites au chapitre III. Le premier point concerne le frottement et la rotation qui sont deux problèmes couplés. Le deuxième point concerne le tenseur des contraintes.

II.A. Frottement et rotation

Nous commençons par rappeler certaines observations faites au chapitre III :

- la vitesse de rotation moyenne est égale au demi-gradient de vitesse (figure III-24),
- les fluctuations de vitesse de rotation sont importantes en comparaison de la vitesse de rotation moyenne (figure III-28),
- la mobilisation moyenne du frottement est très anisotrope, et l'on observe que le coefficient de frottement effectif est notablement réduit par rapport au coefficient de frottement entre grains (figure III-48 et 49).

II.A.1. Vitesse de rotation moyenne et demi-gradient de vitesse

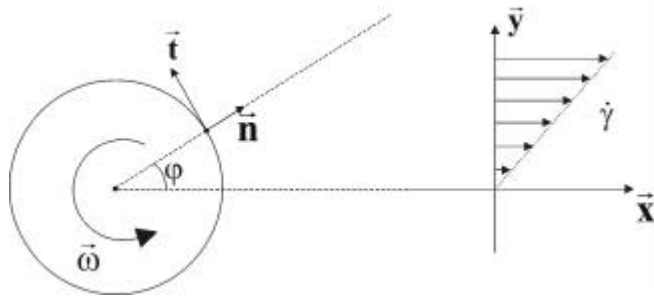


Figure V- 14 : schéma du mouvement de rotation d'un grain au sein de la couche cisailée.

On commence par une description moyenne, sans fluctuation, dans une image de champ moyen. On considère donc un grain (disque de rayon R) dont la vitesse de rotation est constante, notée ω (comptée positivement dans le sens des aiguilles d'une montre). On décrit l'assemblée granulaire dans laquelle ce grain est plongé par un milieu continu où règne un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Ce qui va nous intéresser dans la suite, c'est la vitesse relative tangente à la surface du grain, car c'est elle qui va déterminer la mobilisation du frottement. Elle est estimée à partir des vitesses de translation relative et de rotation relative du grain fictif du milieu continu et du grain considéré. Sa dépendance en fonction de l'orientation φ , vaut :

$$V_r(\varphi) = 2\dot{\gamma}R \sin \varphi \vec{x} \cdot \vec{t}_\varphi + 2R\omega = -2\dot{\gamma}R \sin^2 \varphi + 2R\omega = 2\dot{\gamma}R \left(\frac{\omega}{\dot{\gamma}} - \sin^2 \varphi \right) \quad [\text{V.86}]$$

On fait alors l'hypothèse que les contacts sont tous glissants. En conséquence :

$$T = \pm \mu N \quad \text{selon le signe de } V_r \quad [\text{V.87}]$$

En conséquence, la force tangentielle totale à laquelle est soumis ce grain vaut :

$$T^{\text{Total}} = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\varphi) N(R \sin \varphi, \varphi) \text{signe}(V_r(\varphi)) \quad [\text{V.88}]$$

$\rho(\varphi)$ désigne la distribution des orientations de contact définie par l'Eq.III-16. $N(y, \varphi)$ est la force normale moyenne à la cote y , pour un contact dans la direction φ . On a utilisé le fait que la distribution des contacts ne dépend pas de la cote y , contrairement à la force normale moyenne. On écrit ensuite (voir les définitions du chapitre III § V.A, l'annexe 5, et la figure III-38) :

$$\begin{cases} N(R \sin \varphi, \varphi) = \xi_N(\varphi) \langle N(R \sin \varphi) \rangle \\ \langle N(R \sin \varphi) \rangle = a + b R \sin \varphi \end{cases} \quad [\text{V.89}]$$

En conséquence :

$$T^{\text{Total}} = \mu \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\varphi) \xi_N(\varphi) [a + b R \sin \varphi] \text{signe} \left(\frac{\omega}{\dot{\gamma}} - \sin^2 \varphi \right) \quad [\text{V.90}]$$

Par périodicité et normalisation, on a :

$$\rho(\varphi) \xi_N(\varphi) = \frac{1}{2\pi} + \sum_p a_p \cos(2p(\varphi - \varphi_p)) \quad [\text{V.91}]$$

Il est alors facile de voir que :

$$T^{\text{Total}} = \frac{\mu a}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \text{signe} \left(\frac{\omega}{\dot{\gamma}} - \sin^2 \varphi \right) \quad [\text{V.92}]$$

L'hypothèse d'une vitesse de rotation constante dans le temps équivaut à un moment des forces nul ou encore une force tangente totale est nulle, ce qui conduit alors à :

$$\omega = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \quad [\text{V.93}]$$

On a donc alors : $V_r(\varphi) = \dot{\gamma} R \cos(2\varphi)$.

II.A.2. Fluctuation de la vitesse de rotation et frottement effectif

On cherche maintenant à expliquer l'ordre de grandeur et la distribution angulaire du frottement effectif. Pour cela nous allons raffiner le modèle précédent, en prenant en compte les fluctuations de la vitesse de rotation :

$$\begin{cases} \omega = \langle \omega \rangle + \delta\omega \\ \langle \omega \rangle = \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ \Delta\omega = \sqrt{\langle \delta\omega^2 \rangle} \end{cases} \quad [\text{V.94}]$$

Les simulations numériques semblent indiquer que la fonction de distribution des vitesses de rotation est plutôt lorentzienne. Dans la suite, on comparera les cas gaussien et lorentzien :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\omega} \exp\left(-\frac{(\omega - \langle\omega\rangle)^2}{2\Delta\omega^2}\right) \\ \rho_L(\omega) = \frac{1}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \langle\omega\rangle}{\Delta\omega}\right)^2} \end{array} \right. \quad [\text{V.95}]$$

La vitesse relative devient :

$$V_r(\varphi) = 2\dot{\gamma}R \sin\varphi \vec{x} \cdot \vec{t}_\varphi + R(2\langle\omega\rangle + \delta\omega_1 + \delta\omega_2) = \dot{\gamma}R \cos(2\varphi) + 2R\left(\frac{\delta\omega_1 + \delta\omega_2}{2}\right) [\text{V.96}]$$

Faisant l'hypothèse que $\delta\omega_1$ et $\delta\omega_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes, la variable aléatoire $X = (\delta\omega_1 + \delta\omega_2)/2$ vérifie une loi de distribution, gaussienne ou lorentzienne, de moyenne nulle et de variance $\Delta\omega / \sqrt{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_G(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\omega} \exp\left(-\frac{X^2}{\Delta\omega^2}\right) \\ \rho_L(X) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + 2\left(\frac{X}{\Delta\omega}\right)^2} \end{array} \right. \quad [\text{V.97}]$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \mu_{\text{eff}}(\varphi) &= \frac{T}{\mu N}(\varphi) = -\langle \text{signe}(\dot{\gamma} \cos(2\varphi) + 2X) \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} dX \rho(X) \text{signe}(X + \langle\omega\rangle \cos(2\varphi)) \end{aligned} \quad [\text{V.98}]$$

$$\Rightarrow \mu_{\text{eff}}(\varphi) = 2 \int_0^{-\langle\omega\rangle \cos(2\varphi)} dX \rho(X) \quad [\text{V.99}]$$

Dans le cas gaussien :

$$\mu_{\text{eff}}(\varphi) = -\text{erf}\left(-\frac{\langle \omega \rangle}{\Delta \omega} \cos(2\varphi)\right) \quad [\text{V.100}]$$

avec $\text{erf}(A) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^A \exp(-x^2) dx$

Dans le cas lorentzien :

$$\mu_{\text{eff}}(\varphi) = -\frac{2}{\pi} \text{arctg}\left(\frac{\sqrt{2} \langle \omega \rangle}{\Delta \omega} \cos(2\varphi)\right) \quad [\text{V.101}]$$

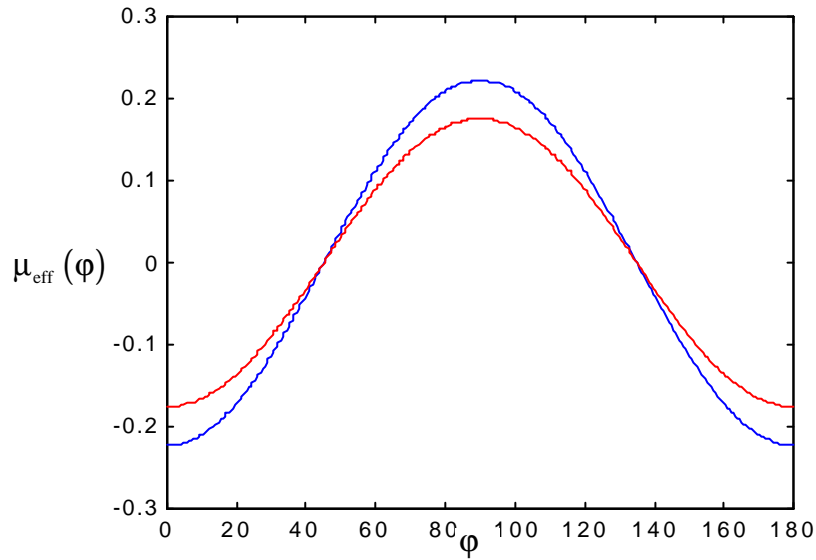


Figure V-15 : Prédiction pour $m_{\text{eff}}(\mathbf{j})$, pour $Dw/\langle w \rangle = 5$ (distribution gaussienne (bleu) et lorentzienne (rouge)).

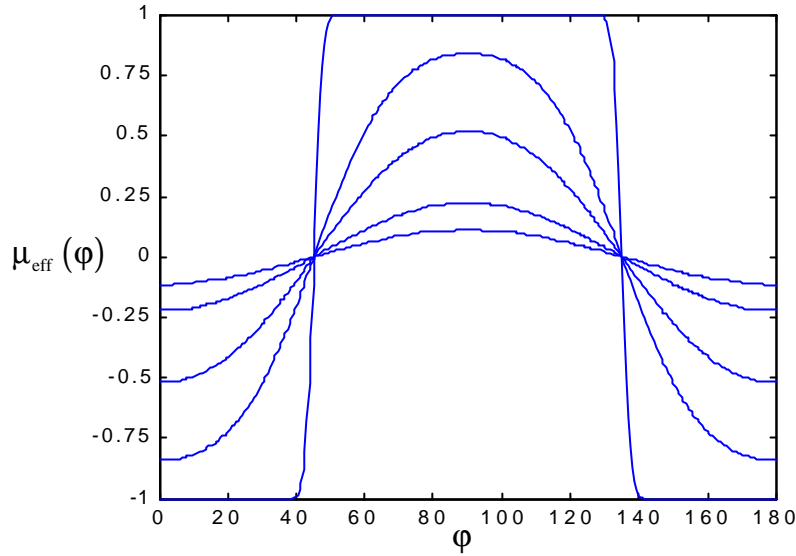


Figure V-16: Prédiction pour $m_{eff}(\mathbf{j})$, pour $D\mathbf{w}/\langle \mathbf{w} \rangle = 10 - 5 - 2 - 1 - 1/10$ (distribution gaussienne).

Les figures V-15 et V-16 montrent les prédictions de ce modèle. Le frottement effectif est négatif dans la direction de l'écoulement : les contacts "au sein d'une même couche" tendent à freiner la rotation des grains. Il est positif dans la direction orthogonale à l'écoulement : les contacts "entre deux couches" tendent alors à augmenter la rotation des grains. On retrouve bien l'allure de la distribution angulaire du frottement effectif, et son ordre de grandeur (voir figures III-48,49 et 50). La prédiction peut être considérée comme correcte au vu de la simplicité des hypothèses. En particulier, tous les contacts ont été considérés comme glissants, alors que ce n'est le cas que d'environ la moitié d'entre eux (pour $\mu = 0.4$).

II.A.3. Influence du coefficient de frottement intergrain

A titre d'illustration du modèle précédent, nous discutons maintenant l'influence du coefficient de frottement intergrain sur les fluctuations de rotation et sur le frottement effectif. En plus de la valeur 0,4 utilisée dans l'étude du chapitre III, les valeurs $\mu = 0,2, 0,6$ et $0,8$ ont été ici étudiées pour un système de 1000 particules. Les distributions sont mesurées sur l'ensemble de la couche (sachant qu'elles ne dépendent pas de la cote, sauf près du socle et de la surface libre). On observe que l'intensité des fluctuations de vitesse de rotation, mesurée par la valeur relative $\Delta\omega/\omega$, augmente avec le coefficient de frottement (figure V-17), de 4 pour $\mu = 0,2$ à 8 pour $\mu = 0,8$. Par ailleurs, la distribution des orientations de contact et

l'anisotropie de la mobilisation du frottement ont été mesurées et sont indiquées sur la figure V-18. La forme de la dépendance reste la même, mais on constate une augmentation du produit $\rho(\varphi) \mu_{\text{eff}}(\varphi)$ avec le coefficient de frottement.

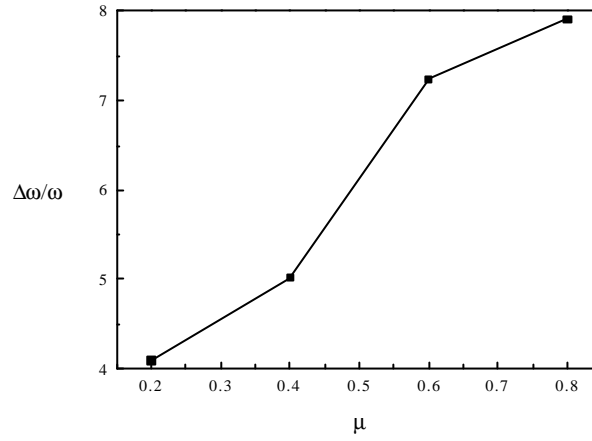
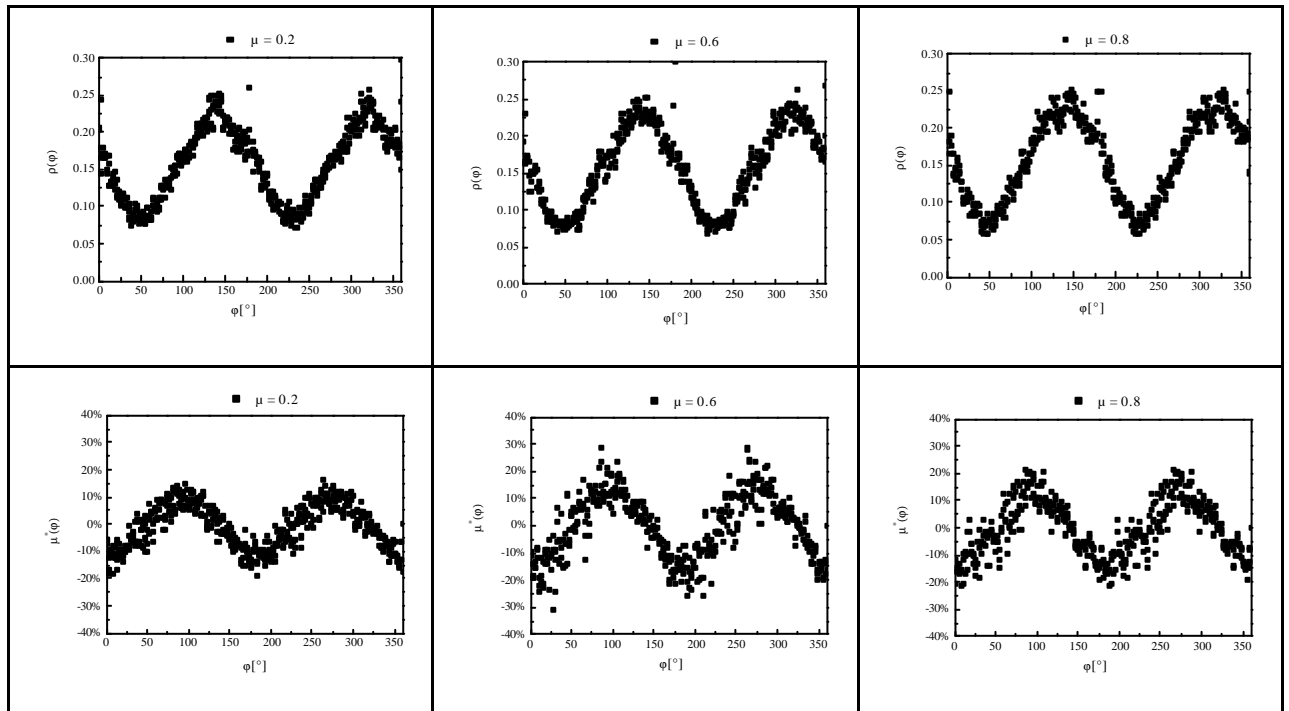


Figure V-17 : Influence du coefficient de frottement sur l'intensité des fluctuations de vitesse de rotation
($N = 1000$ - $q = 23^\circ$ - $p = 0,15$).



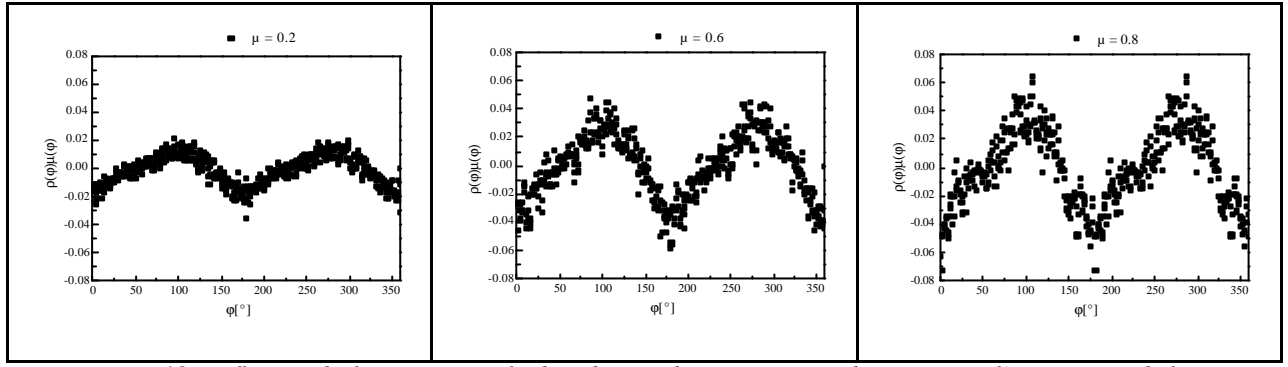


Figure V-18 : Influence du frottement sur la distribution des orientations de contact, et l'anisotropie de la mobilisation du frottement ($N = 1000$ - $q = 23^\circ$ - $p = 0,15$).

II.A.4. Estimation des fluctuations de vitesse de rotation

La modélisation précédente permet de comprendre pourquoi la vitesse de rotation moyenne est égale au demi-gradient de vitesse de translation, ainsi que la distribution angulaire et l'ordre de grandeur du frottement effectif. Tout est lié, d'une part au fait que le moment des forces sur un grain est nul en moyenne, d'autre part à l'importance des fluctuations de la vitesse de rotation. Reste alors à comprendre pourquoi ces fluctuations de vitesse sont aussi importantes, et éventuellement à déterminer leur ordre de grandeur, et leur dépendance en fonction du coefficient de frottement. Nos tentatives d'un modèle prédictif complet sont restées infructueuses à ce jour. Nous nous bornerons à proposer une explication simple de l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse.

Notre argument est le suivant : lors des contacts entre grains, il y a redistribution de l'énergie cinétique de translation en énergie cinétique de rotation. C'est en somme une idée d'équipartition de l'énergie. Cependant, l'énergie cinétique de translation qui intervient est essentiellement dominé par le cisaillement des couches granulaires (i.e. les fluctuations de vitesse de translation joue un rôle faible), soit pour un grain :

$$\langle E_c^{\text{Trans}} \rangle = \frac{1}{2} m (\dot{\gamma} d)^2 \quad [\text{V.102}]$$

Par contre, compte-tenu de l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse, l'énergie cinétique de rotation est dominée par les fluctuations :

$$\langle E_c^{\text{Rot}} \rangle \approx \frac{1}{2} I \Delta \omega^2 \quad [\text{V.103}]$$

En introduisant le rayon de gyration K ($I = K m R^2$), et en égalant les deux expressions précédentes, il vient :

$$\Delta \omega \approx \frac{2}{\sqrt{K}} \dot{\gamma} \quad [\text{V.104}]$$

En utilisant alors l'égalité de la vitesse de rotation moyenne au demi-gradient de vitesse, il vient :

$$\frac{\Delta \omega}{\langle \omega \rangle} \approx \frac{4}{\sqrt{K}} \quad [\text{V.105}]$$

En conséquence, l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse de rotation serait lié au rayon de gyration, c'est à dire à la forme des grains. Pour des disques, $K = 1/2$ donne une prédiction entre 5 et 6, ce qui est raisonnable. Pour des pentagones, le calcul donne $K = 0,354$, soit une valeur plus proche de 7. De fait les fluctuations de vitesse de rotation semblent-il plus importantes dans le cas des pentagones [Moucheron00]. En revanche, cet argument simple n'est pas capable d'expliquer les dépendances en fonction du coefficient de frottement.

II.B. Calcul du tenseur des contraintes

Dans cette partie, nous souhaitons montrer l'intérêt des grandeurs statistiques décrivant le réseau de contact, mesurées au chapitre III §V, pour le calcul du tenseur des contraintes. C'est une question qui a été abordée par plusieurs auteurs, dans la situation quasi-statique [Kanatani81, Cambou95, Calvetti97] ou plus succinctement en écoulement [Babic90, Zhang92]. Notre approche est très naïve, puisqu'elle va complètement négliger les corrélations spatiales entre contacts auxquels un grain est soumis, mais peut donner une première idée. Nous partons du constat fait au chapitre III §V.C que le tenseur des contraintes est dominé dans les écoulements denses que nous avons étudiés par le terme de contact. Il peut donc être calculé comme une moyenne des moments internes définis par Moreau (voir Annexe 5 - Eq.5.17 et Annexe 6), en se restreignant au terme associé aux forces de contact :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(y) = \frac{1}{L} \sum_c \underline{\underline{\sigma}}_i \lambda_i(y) \quad [\text{V.106}]$$

où la somme est effectuée sur tous les grains, avec la fonction de pondération définie en Annexe 5 (Eq.V.4). L est la largeur de la fenêtre. Pour un disque de rayon R_i (et de surface $S_i = \pi R_i^2$), soumis aux forces de contact \vec{f}^c aux points \vec{r}^c :

$$\underline{\underline{\sigma}}^i = \frac{1}{S_i} \sum_c \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c \quad [\text{V.107}]$$

Dans la suite, on pose :

$$g^i(y) = \frac{\lambda^i(y)}{S_i} \quad \text{tel que} \quad \int g^i(y) dy = 1 \quad [\text{V.108}]$$

Le tenseur des contraintes s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(y) = \frac{1}{L} \sum_i \left(\sum_c \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c \right) g^i(y) \quad [\text{V.109}]$$

Pour poursuivre le calcul, on fait une hypothèse de type champ moyen sur le moment interne, c'est à dire que l'on calcule le moment interne moyen à partir des distributions statistiques des forces, sans tenir compte des corrélations qui existent forcément entre les différentes forces auxquelles un grain est soumis de la part de ses voisins (voir la thèse de Troadec à Montpellier).

Pour un grain dont le centre est à la côte y , on intègre tout autour du grain (φ de 0 à 2π) la force moyenne qui existe à la côte $y = y + R_i \sin\varphi$, pour un contact orienté dans la direction φ :

$$\langle \underline{\underline{M}}(y_i, R_i) \rangle = \left\langle \sum_\alpha \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c \right\rangle = R_i \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(y, \varphi) \left(N(y, \varphi) \vec{n}_\varphi + T(y, \varphi) \vec{t}_\varphi \right) \otimes \vec{n}_\varphi \quad [\text{V.110}]$$

On écrit ensuite :

$$\begin{cases} N(y, \varphi) = \langle N(y) \rangle \xi_N(y, \varphi) \\ T(y, \varphi) = \langle N(y) \rangle m^*(y, \varphi) \end{cases} \quad [\text{V.111}]$$

en faisant l'hypothèse que :

$$m^*(y, \varphi) = \mu^*(y, \varphi) \xi_N(y, \varphi) \quad [\text{V.112}]$$

On utilise ensuite l'observation du chapitre III, à savoir que $\xi_N(\varphi)$, $\mu^*(\varphi)$, $\rho(\varphi)$ sont indépendants de y . En conséquence :

$$\langle \underline{\underline{M}}(y_i, R_i) \rangle = R^i \int_0^{2\pi} d\varphi \langle N(y) \rangle \rho(\varphi) \left(\xi_N(\varphi) \vec{n}_\varphi + m^*(\varphi) \vec{t}_\varphi \right) \otimes \vec{n}_\varphi \quad [\text{V.113}]$$

Puis, on prend en compte la variation linéaire de $\langle N(y) \rangle$ dans le milieu de compacité constante (voir figure III-38) :

$$\langle N \rangle(y) = N_0 + \alpha y \quad [\text{V.114}]$$

On définit alors les tenseurs $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{D}}$ tels que :

$$\begin{cases} \langle \underline{\underline{A}} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\varphi) \xi_N(\varphi) \vec{n}_\varphi \otimes \vec{n}_\varphi \\ \langle \underline{\underline{B}} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\varphi) m^*(\varphi) \vec{t}_\varphi \otimes \vec{n}_\varphi \\ \langle \underline{\underline{C}} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\varphi) \xi_N(\varphi) \sin\varphi \vec{n}_\varphi \otimes \vec{n}_\varphi \\ \langle \underline{\underline{D}} \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\varphi) m^*(\varphi) \sin\varphi \vec{t}_\varphi \otimes \vec{n}_\varphi \end{cases} \quad [\text{V.115}]$$

En utilisant les notations condensées du type :

$$CS\xi_N = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sin\varphi \rho(\varphi) \xi_N(\varphi) \quad [\text{V.116}]$$

ces tenseurs s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \underline{\underline{A}} \rangle &= \begin{pmatrix} \xi_N C^2 & \xi_N CS \\ \xi_N CS & \xi_N S^2 \end{pmatrix} \\ \langle \underline{\underline{B}} \rangle &= \begin{pmatrix} -m^* CS & -m^* S^2 \\ m^* C^2 & m^* CS \end{pmatrix} \\ \langle \underline{\underline{C}} \rangle &= \begin{pmatrix} \xi_N C^2 S & \xi_N CS^2 \\ \xi_N CS^2 & \xi_N S^3 \end{pmatrix} \\ \langle \underline{\underline{D}} \rangle &= \begin{pmatrix} -m^* CS^2 & -m^* S^3 \\ m^* C^2 S & m^* CS^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \quad [\text{V.117}]$$

Par raison de symétrie :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho(\varphi + \pi) &= \rho(\varphi) \\ \xi_N(\varphi + \pi) &= \xi_N(\varphi) \\ m^*(\varphi + \pi) &= m^*(\varphi) \\ \cos(\varphi + \pi) &= -\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi + \pi) &= -\sin(\varphi) \end{aligned} \right. \quad [\text{V.118}]$$

En conséquence, certaines intégrales sont nulles. On montre ainsi que :

$$\left\{ \begin{aligned} \langle \underline{\underline{C}} \rangle &= 0 \\ \langle \underline{\underline{D}} \rangle &= 0 \end{aligned} \right. \quad [\text{V.119}]$$

De sorte que le moment interne moyen s'écrit :

$$\langle \underline{\underline{M}}(y_i, R_i) \rangle = R^i (N_0 + \alpha y_i) (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \quad [\text{V.120}]$$

et que le tenseur des contraintes moyen vaut :

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\Sigma}}(y) &= \frac{1}{L} \sum_i R^i \dot{g}^i(y) \{ (N_0 + \alpha y_i) (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \} \\
&= (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \left\{ N_0 \left(\frac{1}{L} \sum_i R^i \dot{g}^i(y) \right) + \alpha \left(\frac{1}{L} \sum_i R^i \dot{g}^i(y) y^i \right) \right\}
\end{aligned} \tag{V.121}$$

On définit alors les fonctions de structure :

$$\begin{cases} f_1(y) = \frac{1}{L} \sum_i R^i \dot{g}^i(y) \\ f_2(y) = \frac{1}{L} \sum_i R^i \dot{g}^i(y) y^i \end{cases} \tag{V.122}$$

Moyennant l'hypothèse d'une faible polydispersité :

$$\begin{cases} f_1(y) \simeq \frac{1}{\pi R} \frac{1}{L} \sum_i f^i(y) \simeq \frac{1}{\pi R} v(y) \\ f_2(y) \simeq \frac{y}{\pi R} v(y) \end{cases} \tag{V.123}$$

et donc :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(y) \simeq \frac{1}{\pi} v(y) (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) \left\{ \frac{N_0 + \alpha y}{R} \right\} \tag{V.124}$$

Dans cette analyse simple, les oscillations des composantes du tenseur des contraintes dans une zone structurée sont directement reliées à celles de la compacité.

Si l'on écrit maintenant l'équation de conservation de la quantité de mouvement $\text{div} \underline{\underline{\Sigma}} + \rho \vec{g} = 0$, il vient pour une compacité constante :

$$\begin{cases} \alpha (\xi_N CS - m^* S^2) = \pi R \rho_p g \theta \\ \alpha (\xi_N S^2 + m^* CS) = \pi R \rho_p g \end{cases} \tag{V.125}$$

Les deux observations faites au chapitre III, à savoir la symétrie du tenseur et l'égalité de ces composantes diagonales apparaissent alors comme reliées aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \Sigma_{xy} = \Sigma_{yx} \Leftrightarrow (\xi_N CS - m^* S^2) = (\xi_N CS - m^* C^2) \Leftrightarrow m^* = 0 \\ \Sigma_{xx} = \Sigma_{yy} \Leftrightarrow (\xi_N S^2 + m^* CS) = (\xi_N C^2 - m^* CS) \Leftrightarrow \int \xi_N \cos(2\varphi) = \int m^* \sin(2\varphi) \end{cases} \quad [\text{V.126}]$$

III. Conclusion

La même étude (modèles rhéologiques, micromécanique) n'a pu être menée, faute de temps, pour la conduite verticale. Plus largement, il faudrait aborder les autres géométries d'écoulement : écoulement sur un socle meuble (tambour tournant), cisaillement plan ou annulaire.

CONCLUSION

CONCLUSIONS

Voici le moment d'apporter une conclusion à ce document. Notre étude a démarré il y a cinq ans au moment des premiers résultats de Pouliquen et Azanza sur les lois d'échelle dans les écoulements sur plan incliné, qui semblaient difficile à comprendre. Depuis, la communauté scientifique s'est fortement investi sur la problématique des écoulements denses de grains secs, comme l'a montré notre revue du chapitre II. Plusieurs géométries ont fait l'objets d'études expérimentales et par simulations numériques, de sorte que l'on dispose désormais d'un ensemble d'observations assez complet, qui doit d'ailleurs faire l'objet d'un article de synthèse de la part des chercheurs du Groupement de Recherche du CNRS sur les milieux divisés. Ces résultats vont constituer une référence incontournable pour la discussion des modèles. Sur le front de la modélisation, on a montré au chapitre V l'effort important de la communauté scientifique. De nombreuses pistes très intéressantes ont été proposées pour décrire les mouvements corrélés dans ces systèmes denses (rôle critique de la compacité et de la connexité du milieu, analogie avec la transition vitreuse pour la divergence de la viscosité, propagation non-locale des forces, processus activés), et il n'existe pas encore une description unifiée. Il est aujourd'hui délicat de faire un tri parmi ces modèles. Cela sera possible lorsque des comparaisons systématiques auront été faites, dans une gamme de géométrie et de paramètres aussi large que possible.

Dans cet ensemble, nous espérons avoir apporté une contribution utile pour ce qui est des écoulements sur plan incliné. Avec l'étude américaine de Silbert, notre étude nous semble la plus complète à ce jour. Dans le cas de la conduite verticale, notre apport est plus modeste. Notre motivation s'est plutôt située au niveau de la mise en œuvre d'une nouvelle technique expérimentale pour sonder les milieux granulaires, et les travaux se poursuivent sur cette lancée dans notre laboratoire.

Nous voudrions maintenant lister quelques conclusions que notre travail nous semble avoir contribué à bien établir. Tout d'abord, il faut distinguer écoulements confinés et écoulements à surface libre. Dans le premier cas, la compacité est très élevée, et le milieu a peu de facilité pour se dilater. On peut raisonnablement penser que l'on est au-dessus du seuil

de connexité discuté au chapitre V, de sorte que le caractère non-local est important. Ceci conduit à une localisation de la déformation près des parois, où la viscosité décroît du fait de la structuration du milieu. Les observations que nous avons faites en conduite verticale semblent indiquer des profils de vitesse indépendant du taux de déformation, c'est à dire un régime d'écoulement quasi-statique. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de confronter nos mesures aux prédictions des modèles. Dans le cas des écoulements à surface libre, le milieu a la faculté de se dilater, et de fait, les variations de la compacité sont notables. Il en résulte une rhéologie plus compliquée, avec des effets de seuil en fonction de l'inclinaison, des comportements d'interface différents des comportement à distance de la paroi, ou encore un couplage entre frottement et rotation conduisant à une réduction significative du frottement effectif.

Sur plan incliné, la simulation numérique doit permettre une exploration plus systématique : écoulements tridimensionnels, effets de la rugosité (en variant la taille et l'écartement des grains collés) ou encore de la polydispersité. Une confrontation semi-quantitative avec les modèles est possible à condition de faire certains choix sur les hypothèses. La mesure des paramètres intervenant dans les modèles, et des dépendances en compacité, taux de cisaillement ou fluctuations de vitesse, est essentielle pour apporter une conclusion définitive. Un tel travail est actuellement en cours au laboratoire, dans le cadre de la thèse de da Cruz.

De nombreuses questions restent ouvertes : nous nous sommes en effet limités aux écoulements stationnaires uniformes, en s'approchant éventuellement de l'épaisseur d'arrêt. Nous n'avons pas du tout étudié les écoulements non stationnaires. Une question importante est celle de la compréhension des seuils d'écoulement (arrêt mais aussi démarrage de l'écoulement). ceci nécessite sans doute d'étudier la dynamique du réseau de contact lors de cette transition liquide-solide. Là encore, c'est un aspect étudié dans le cadre de la thèse de da Cruz. Si l'on veut introduire en plus le caractère non uniforme de l'écoulement, par exemple la variation de l'épaisseur lors d'une avalanche de grains sur un plan incliné, les approches les plus prometteuses sont les approches macroscopiques moyennées sur l'épaisseur développées avec succès par les chercheurs français (Pouliquen, Douady, Andreotti, de Gennes...). La mise en œuvre de ces méthodes ne nécessite pas une connaissance précise de ce qui passe à

l'intérieur de l'écoulement, En revanche, il faut connaître le rapport des pressions verticales et horizontales, et les dépendances du frottement effectif du matériau sur le socle en fonction de son épaisseur et du taux de cisaillement. Nos résultats apportent des informations précises sur ces deux derniers points.

Enfin, au-delà des écoulements denses de grains secs, il serait important de pouvoir étudier l'influence de la cohésion qui intervient dans de nombreuses situations pratiques (poudres, granulats humides, neige dense, troisième corps en tribologie...). Naturellement, on peut s'attendre dans ce cas à la formation d'agrégats, à des phénomènes de fracturation... et la rhéologie risque d'être assez différente. Quels sont les aspects de la description des écoulements de grains secs qui se maintiendront, quels sont ceux qui seront modifiés dans le cas de grains cohésifs ? C'est sur cette perspective ouverte que nous concluons ce document.

ANNEXE 1

GAMMA-DENSITOMETRIE

ANNEXE 1

GAMMA-DENSITOMETRIE

I. Introduction

La compacité est une grandeur importante pour qualifier un matériau granulaire, dans la mesure où elle rend compte, de manière moyenne, de l'arrangement des grains. En particulier dans un écoulement, les interactions entre grains vont dépendre de la compacité : il s'agira plutôt de collisions dans un milieu dilué, et plutôt de frottement dans un milieu dense. Le profil de compacité au sein d'une couche en écoulement est donc une information importante pour la modélisation.

Des mesures ont été faites en géométrie bidimensionnelle [Drake88, Azanza98]. La mesure est beaucoup plus délicate dans un écoulement tridimensionnel. Les outils d'investigation vont des fibres optiques à la paroi [Ahn91], à d'autres plus rudimentaires [Augenstein78, Ridgway70]. Aucune ne fournit de mesure interne à la structure ; elles restent souvent très invasives et/ou perturbatives. Ces mesures sont donc sujettes à caution. On doit signaler cependant l'utilisation récente d'outils d'investigation non invasifs : rayons X [Mueth00], IRM (voir chapitre IV).

La gamma-densimétrie constitue une alternative intéressante, car son principe d'utilisation est assez simple et son encombrement spatial reste modéré. Cette technique a été utilisée depuis plus de quatre décennies pour mesurer la densité de certains matériaux. Son utilisation est cependant restée limitée surtout au domaine du génie civil où elle reste une des mieux connues et des plus utilisées pour la mesure de la densité et de l'humidité des sols et des chaussées, et pour le contrôle de qualité des ouvrages de construction. Elle a été utilisée pour mesurer la compacité d'empilements granulaires statiques [Tan91], ainsi que pour des écoulements granulaires [Bosley69, van Zuilichem74, Nikitidis 98]. Après avoir décrit le principe de la mesure, nous exposons les mesures de profil de compacité réalisées pour des écoulements granulaires sur plan incliné.

II. Principe et caractéristiques du dispositif de mesure

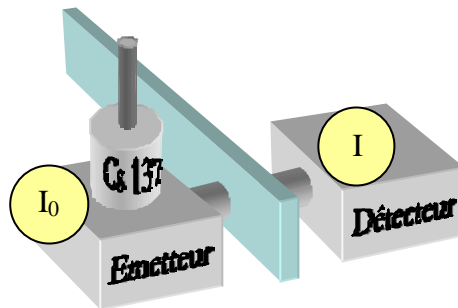


Figure 1- 1 : Schéma du dispositif expérimental.

Le dispositif utilise le principe de l'atténuation par le matériau du rayonnement gamma émis par une source radioactive. Cette absorption est une fonction exponentielle de l'épaisseur de matériau traversé. L'utilisation de la loi d'absorption n'est valable que lorsque l'on capte le rayonnement direct issu de la source, sans déviation, et non le rayonnement diffusé. Pour réaliser cette condition, on canalise le faisceau émetteur et place sur le trajet source-détecteur du rayonnement, de part et d'autre de l'échantillon, des disques en plomb comportant des fenêtres rectangulaires ou des diaphragmes pour focaliser le faisceau. Dans notre cas nous avons utilisé une fente rectangulaire de $2 \times 50 \text{ mm}^2$. Ce dispositif arrête une partie du rayonnement diffusé qui est ainsi éliminée du comptage. Une autre partie du rayonnement diffusé est éliminée électroniquement grâce au dispositif de détection utilisée (scintillateur associé à un photomultiplicateur).

On réalise donc l'absorption d'un faisceau étroit de photons gamma d'énergie donnée et d'intensité I_0 par un échantillon de masse volumique $\rho = \rho_p v$ et d'épaisseur e . Certains de ces photons émis par la source radioactive traversent le matériau granulaire en écoulement sans être diffusés, ni absorbés.

Leur flux d'intensité I est directement lié à la masse surfacique ρe du matériau par la relation :

$$I = I_0 \cdot e^{-K \cdot \mu'(\rho e)} \quad [1.1]$$

où μ' est le coefficient d'absorption massique théorique du matériau. Pour le verre, il vaut $0,0771 \text{ cm}^2.\text{g}^{-1}$. K est un coefficient qui caractérise l'appareillage, et qui rend compte de l'écart d'idéalité entre le coefficient d'absorption massique mesuré expérimentalement et celui proposé théoriquement.

On utilise une source émettrice de Césium 137 (^{137}Cs), dont l'activité est de l'ordre de 7 millicuries (7 mCi). La source radioactive est logée dans un container, dont le système de sécurité et l'épaisseur de plomb assurent une protection efficace des utilisateurs.

On a veillé au fait que les blocs émetteur et détecteur soient en alignement au niveau de leurs diaphragmes, grâce au dispositif de soutien de ces deux blocs. Cela permet une bonne collimation du faisceau de rayons gamma. L'échantillon en écoulement est placé entre l'émetteur et le détecteur, dont la distance de séparation est choisie de manière optimale.

Le détecteur est une sonde scintillométrique composée d'un cristal à scintillation (iodure de sodium activé au Thallium) associé à un photomultiplicateur. Lorsqu'il est excité par les photo-électrons du rayonnement absorbé, le cristal émet par scintillation des photons lumineux dont l'énergie totale est proportionnelle à l'énergie incidente du rayonnement.

Ces photons lumineux, en frappant la photocathode, provoquent l'émission de photo-électrons. Ces derniers arrivent sur les dynodes où ils libèrent chacun plusieurs électrons secondaires qui sont collectés en fin de parcours sur l'anode du phototube. Cette sonde permet une discrimination d'énergie qui consiste à capter tous les photons qui ont une énergie supérieure à une valeur choisie appelée seuil de discrimination énergétique.

D'autre part dans la chaîne de mesure électronique située en amont du détecteur, il est possible de discriminer les impulsions correspondant à la diffusion Compton par l'application d'un seuil dont la valeur est affichée sur un potentiomètre. La chaîne de comptage ne va récupérer que le signal dont les impulsions ont une amplitude supérieure à celle du seuil.

III. Mesure et précision de la mesure

A partir de ce qui a été écrit précédemment, le phénomène d'absorption se traduit par la relation¹ entre les comptages moyens par unité de temps \bar{C} et \bar{C}_0 ($[\bar{C}] = \text{coup} \cdot \text{s}^{-1}$):

$$\bar{C} = \bar{C}_0 \cdot e^{-K \cdot \mu' \cdot (\rho \cdot e)} \quad [1.2]$$

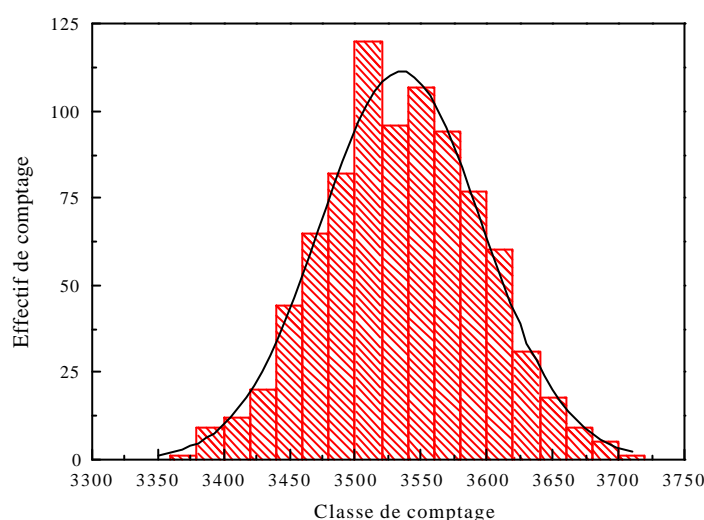


Figure 1 - 2: Exemple de statistique de comptage : Histogramme expérimental du comptage à vide et courbe de distribution normale théorique obtenue à partir des valeurs de la moyenne et de l'écart-type expérimental.

La mesure de la compacité $v = \frac{V_{\text{occupé}}}{V_{\text{total}}} = \frac{\rho}{\rho_p}$ correspond donc à :

$$v = \frac{1}{K \cdot \mu' \cdot \rho_p \cdot e} \cdot \ln \left(\frac{\bar{C}_0}{\bar{C}} \right) \quad [1.3]$$

Pour connaître l'erreur sur v on doit, entre autre, calculer l'erreur sur le rapport des taux de comptage moyen \bar{C}_0 / \bar{C} . Le rayonnement gamma est par essence aléatoire, et donc les valeurs \bar{C} et \bar{C}_0 le sont aussi. Leurs distributions suivent des lois normales de moyennes

¹ L'électronique de comptage ne pouvant pas suivre exactement le flux entrant de photons au niveau du photomultiplicateur, il faut tenir compte d'un délai de réponse $\delta = 3 \cdot 10^{-6} \text{s}$ de ce dernier. On doit, en conséquence, corriger le comptage. Cette correction est assurée par la relation suivante: $\bar{C}_c = \bar{C} / (1 - \delta \cdot \bar{C})$. Il faut noter que dans notre cas cette relation n'apporte que très peu de correction car $\bar{C} \ll \frac{1}{\delta}$.

respectives \bar{C} et \bar{C}_0 et d'écart-types respectifs $\sqrt{\bar{C}}$ et $\sqrt{\bar{C}_0}$. Le rapport des taux de comptage suit également une distribution normale d'écart-type $\sigma_{\frac{C}{C_0}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_C}{\bar{C}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{C_0}}{\bar{C}_0}\right)^2}$. Ceci implique que l'ordre de grandeur de l'erreur relative sur la compacité v , en supposant K et μ parfaitement connus est :

$$\frac{\Delta v}{v} \cong \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta \rho_p}{\rho_p} + \sqrt{\frac{1}{\tau \cdot \bar{C}} + \frac{1}{\tau_0 \cdot \bar{C}_0}} \quad [1.4]$$

où τ et τ_0 représentent les temps de mesure respectifs des comptages, qui sont dans notre étude identiques et de l'ordre de 60 s.

La précision des mesures est de l'ordre de 3,5%. L'incertitude a deux origines, l'une d'ordre expérimental ($\frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta \rho_p}{\rho_p} \cong 3,3 \%$) et l'autre d'ordre statistique ($\sqrt{\frac{1}{\tau \cdot \bar{C}} + \frac{1}{\tau_0 \cdot \bar{C}_0}} \cong 0,2 \%$). On note que l'incertitude la plus importante est celle qui est systématique, directement reliée à l'expérience. L'incertitude de comptage ne dépend que du temps de comptage et de l'activité de la source radioactive. Ces deux dernières grandeurs ont été choisies pour s'affranchir de l'erreur statistique.

IV. Canaux d'écoulement

Les premières expériences ont été réalisées au Cemagref de Grenoble, sur le canal d'écoulement tridimensionnel mis au point par Christophe Ancéy [Ancéy96]. Ce canal d'écoulement de grande taille permet d'acquérir des données sur une assez grande plage de débit massique. Le canal, entièrement réalisé en P.V.C., a une longueur de 2 m, une largeur utile $L = 4,8$ cm (compte tenu des films P.V.C. antistatiques) et une hauteur de 15 cm. Le fond du canal est constitué d'une rugosité réalisée par l'apposition sur un film Scotch double-face de billes de verre de 2 mm. Un système d'entretoise permet de rigidifier le canal sur toute sa longueur. Un système de recirculation à l'aide de deux pompes permet un débit continu du matériau granulaire. Une trémie à vis, en amont du canal permet de contrôler à l'aide d'une vanne pointeau le débit massique Q_m . Un autre paramètre de contrôle expérimental de ce dispositif est l'angle d'inclinaison θ . Le matériau granulaire utilisé est constitué d'un mélange

de billes de verre de diamètre $d = 800 \mu\text{m}$ et 1 mm et de masse volumique $\rho_p = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$. Deux débits (430 g.s^{-1} et 780 g.s^{-1}) et quatre inclinaisons (27° , 30° , 33° et 37°) ont été étudiés. Nous avons choisi cette gamme de paramètre car ils permettent d'obtenir un régime d'écoulement stationnaire uniforme stable. Aux angles d'inclinaison et aux débits choisis, il existe une relation linéaire entre la hauteur d'écoulement à surface libre H et le débit massique Q_m . Les résultats obtenus sur le canal du Cemagref ont été publiés dans [Ancey02].

Une autre expérience sur plan incliné a été réalisée dans les locaux du LMSGC, en utilisant un canal en aluminium. Ce canal à une longueur totale de 5 m et une largeur utile de $L = 5 \text{ cm}$ pour une hauteur de $H = 6 \text{ cm}$. Le fond du canal est constitué d'une rugosité réalisée par l'apposition sur un film Scotch double-face de billes de verre de $1,5 \text{ mm}$. A la différence du canal du Cemagref, il n'existe pas de système de recirculation, mais une trémie réservoir de grande contenance (la même que celle utilisée dans les expériences d'IRM) assure un débit constant dans le canal. Le matériau granulaire utilisé est constitué de billes de verre $d = 1,5 \text{ mm}$ et de masse volumique $\rho_p = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$. Seuls deux angles d'inclinaison du plan ($14,7^\circ$ et $23,2^\circ$) et deux débits massiques (130 g.s^{-1} et 1250 g.s^{-1}) ont été étudiés.

De façon à pouvoir comparer les résultats de ces expériences, nous exprimons le débit sous forme adimensionné :

$$Q^* = \frac{Q_m}{\rho_p L d \sqrt{g d}} \approx \langle v \rangle V^* H^* \quad [1.5]$$

V^* et H^* désignent la vitesse moyenne et l'épaisseur de l'écoulement, toutes deux adimensionnées. Les débits adimensionnés valent 32 et 58 dans l'expérience du Cemagref et 2,5 et 24 dans l'expérience du LMSGC.

V. Profils de compacité

Une mesure à l'arrêt pour une inclinaison proche de l'angle d'avalanche sert de référence (figure 1-3). La figure 1-4 montre l'influence de l'inclinaison du canal θ et du débit Q sur le profil de compacité. On observe de façon générale une décroissance de la compacité depuis le socle. Cette décroissance est en général assez lente jusqu'à la surface libre où la

chute est brutale. On constate également qu'il n'existe pas de forme générale du profil de compacité. Lorsque l'inclinaison augmente à débit constant, l'écoulement accélère, s'amincit, devient plus dilué et plus agité. Par ailleurs, lorsque le débit augmente à inclinaison fixée, l'écoulement s'épaissit, se densifie et freine.

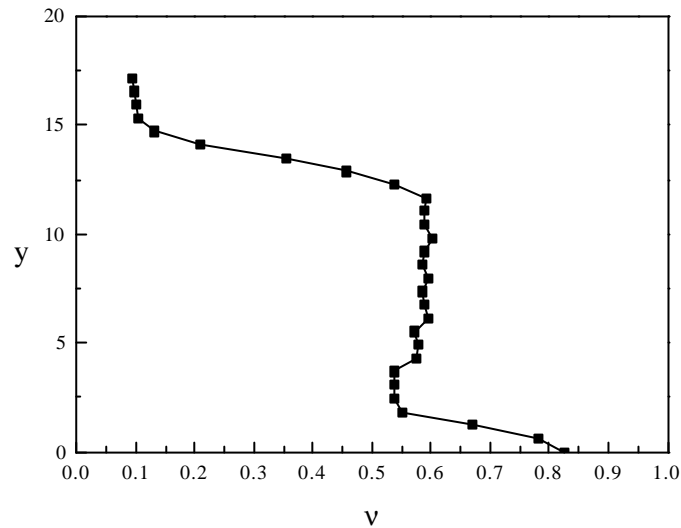


Figure 1-3 : Profil de compacité à l'arrêt. Ordonnée en millimètre

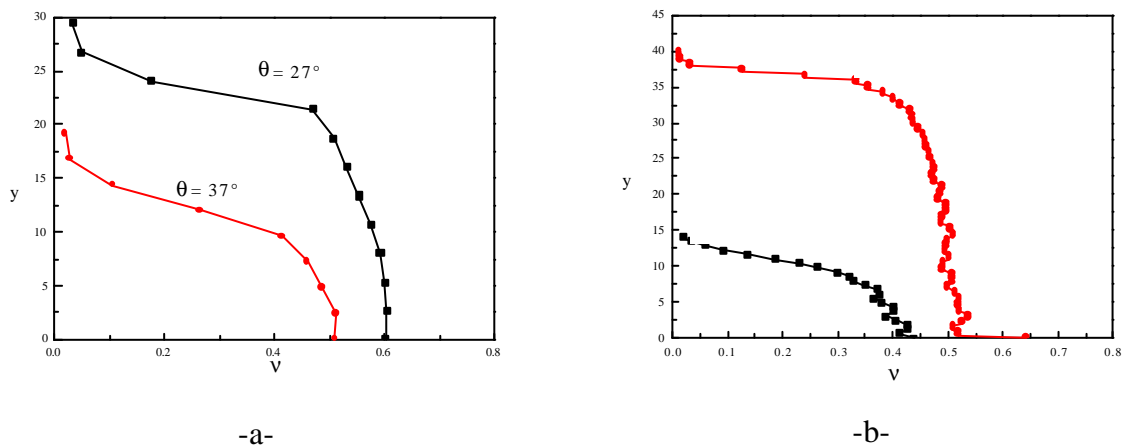


Figure 1 - 4 : Profils de compacité. Ordonnée en millimètre.

a : Influence de l'inclinaison ($Q^* = 32$),

b : Influence du débit ($q = 23,2^\circ$). En rouge $Q^* = 24$. En noir $Q^* = 2,5$

De façon générale, on observe que la compacité décroît avec la hauteur. Cette décroissance reste assez faible pour certains écoulements (faible inclinaison et/ou fort débit), mais plus rapide pour d'autres (forte inclinaison et/ou faible débit). On distingue ainsi des écoulements denses d'écoulements plus dilués. Les valeurs de compacité sont comprises entre 0,5 et 0,6 pour la partie la plus dense, inférieure à 0,4 pour la partie diluée.

Ces profils peuvent être comparés avec ceux mesurés par des techniques différentes par [Augenstein78, Ridgway70, Ahn91]. Les premiers observent une augmentation de la compacité avec l'épaisseur du matériau granulaire en écoulement. Les seconds indiquent que la compacité croît fortement jusqu'à un maximum, pour diminuer ensuite vers la surface libre. Seuls les résultats de [Ahn91] semblent être en accord avec les nôtres, du moins d'un point de vue qualitatif. Les études expérimentales 2D [Azanza98] ou numériques en 2D ou 3D discutées au chapitre III indiquent plutôt un profil de compacité constant qui semble compatible avec celui mesuré pour les écoulements les plus denses ($\theta = 23,2^\circ$ - $Q^* = 24$ ou $\theta = 27^\circ$ - $Q^* = 32$).

VI. Conclusions

D'autres mesures ont été réalisées en conduite verticale. Les résultats sont présentés au chapitre IV. Nous avons montré la faisabilité de la mesure du profil de compacité par gamma-densitométrie dans un écoulement granulaire stationnaire. Cependant, notre étude reste une étude de faisabilité. Il y aurait lieu de faire des mesures plus systématiques. Notons aussi que les temps d'acquisition sont trop longs (plusieurs dizaines de secondes) pour l'étude de phénomènes instationnaires.

Récemment plusieurs auteurs ont utilisé des techniques de diffusion multiple de la lumière pour sonder des milieux granulaires constitués de billes de verre. Il est en particulier possible de mesurer la compacité moyenne, avec une très bonne résolution temporelle. La comparaison des mesures de compacité par les deux techniques a été récemment menée par Olivier Pitois, sur des empilements de billes de verre [Pitois00]. L'application de cette technique à des écoulements pourrait permettre de mettre en évidence des ondes de densité dans les écoulements en conduite verticale (cf. chapitre IV).

ANNEXE 2

VELOCIMETRIE IRM

ANNEXE 2

VELOCIMETRIE IRM

Dans cette annexe, on introduit les notions utiles pour comprendre les méthodes de vélocimétrie par résonance magnétique nucléaire (RMN). Nous commencerons par décrire le principe de la RMN, dans le cadre de la physique classique (non quantique), avant d'aborder l'imagerie par résonance magnétique (IRM), et enfin les techniques de vélocimétrie. Pour une description détaillée, on renvoie aux ouvrages spécialisés [Kastler00, Callaghan93, Callaghan99, Fukushima99]. Les figures sont extraites de [Kastler00].

I. Principe de la résonance magnétique nucléaire

I.A. Magnétisme nucléaire

Certains noyaux atomiques sont dotés d'un moment cinétique ou « spin » \vec{S} (multiple de \hbar) auquel est associé un moment magnétique $\vec{m} = \gamma \vec{S}$, où γ est le rapport gyromagnétique caractéristique de chaque noyau. Ainsi, pour le noyau d'hydrogène, réduit à un proton, qui joue un rôle particulier en RMN de part son abondance, $\gamma = 2,675 \cdot 10^8 \text{ rad s}^{-1} \text{ T}^{-1}$ (figure 2-1).

Dans le cas d'une assemblée de N moments magnétiques occupant un volume V , on définit l'aimantation macroscopique \vec{M} comme la moyenne volumique des moments magnétiques : $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{m}_i$.

I.B. Equations de Bloch

En l'absence de champ magnétique externe, et compte-tenu du caractère négligeable du couplage entre les noyaux, les moments magnétiques sont orientés aléatoirement du fait de l'agitation thermique, de sorte que l'aimantation macroscopique est nulle.

Lorsqu'ils sont plongés dans un champ magnétique externe \vec{B}_0 appelé statique ou principal (qui définit l'axe z), l'évolution temporelle des moments magnétiques élémentaires, caractérisée macroscopiquement par l'aimantation \vec{M} , est régie quantitativement, dans le référentiel du laboratoire, par l'équation de Bloch dont l'expression la plus générale s'écrit :

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = \gamma \vec{M}(t) \wedge \vec{B}_0 \quad [2.1]$$

Ils sont donc animés d'un mouvement de précession autour de \vec{B}_0 , à la fréquence de Larmor $\omega_0 = \gamma B_0$ qui vaut 21 MHz/T pour l'hydrogène. Dans cette situation l'aimantation ne fait apparaître qu'une composante longitudinale \vec{M}_z (aimantation longitudinale) ; à l'équilibre on l'appelle \vec{M}_z^0 . De plus, divers mécanismes (échanges d'énergie entre spins et avec l'environnement moléculaire) dispersent les composantes transversales élémentaires des moments magnétiques dans différentes direction (les protons sont déphasés) : il n'y a donc pas de composante transversale \vec{M}_{xy} résultante.

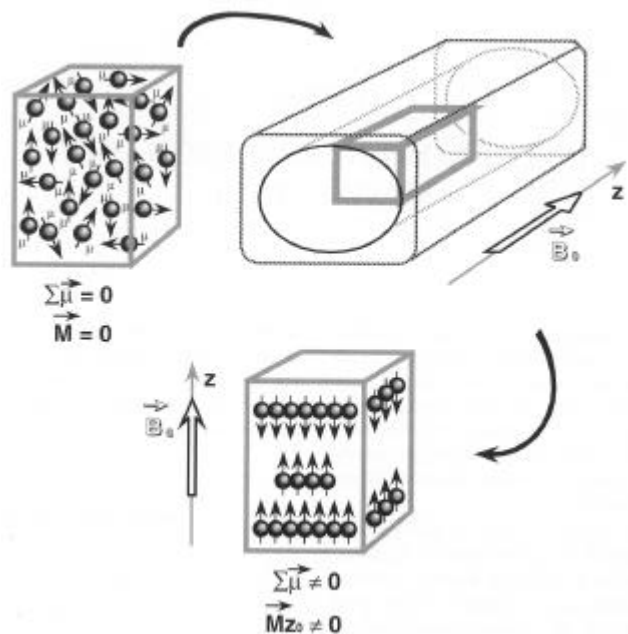


Figure 2-1 : En l'absence de champ magnétique externe, les spins protoniques sont orientés de façon aléatoire. Soumis à un champ, ils s'orientent suivant ce dernier avec l'apparition d'une aimantation macroscopique.

Il n'est pas donc pas possible de mesurer directement le vecteur d'aimantation macroscopique à l'équilibre car il est infiniment petit par rapport à \vec{B}_0 . Pour pouvoir le mesurer, il faut le basculer dans le plan xOy par un deuxième champ magnétique (ou onde radiofréquence) avec une condition de résonance.

I.C. Le phénomène de résonance magnétique nucléaire

Le phénomène de résonance magnétique nucléaire a été décrit en 1946 par Bloch à Stanford et Purcell à Harvard (prix Nobel de Physique en 1952). Ce phénomène apparaît lorsque l'on superpose au champ magnétique externe \vec{B}_0 un champ électromagnétique tournant \vec{B}_1 , appliqué dans le plan xOy pendant une durée τ_p (figure 2-2). La perturbation introduite est d'autant plus efficace que la fréquence de rotation ω_r du champ magnétique tournant est proche de la fréquence de Larmor ω_0 (condition de résonance $\omega_r = \omega_0$). La fréquence de Larmor étant située dans le domaine des ondes radiophoniques, le champ \vec{B}_1 est une onde électromagnétique radiofréquence (onde RF).

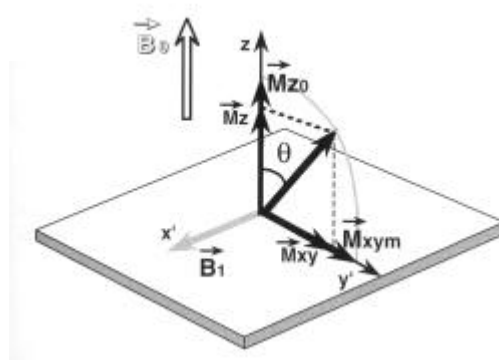


Figure 2-2 : Basculement de l'aimantation sous l'effet d'une onde RF, dans le référentiel tournant.

Tout en continuant à précesser autour de \vec{B}_0 à la fréquence ω_0 , l'aimantation macroscopique va également précesser autour de \vec{B}_1 à la fréquence $\omega_1 = \gamma \cdot B_1$. L'extrémité du vecteur \vec{M} s'abaisse d'un angle de basculement $\alpha = \int_0^{\tau_p} \omega_1(t) dt = \int_0^{\tau_p} \gamma B_1(t) dt$, en décrivant une spirale sur une calotte sphérique du pôle Nord à l'équateur (figure 2-4). Ceci entraîne une

disparition de la composante longitudinale et l'apparition de la composante transversale, avec une mise en phase des spins les uns par rapport aux autres. L'origine de ce rephasage trouve son explication dans un modèle quantique et énergétique, qu'il serait trop compliqué d'expliquer dans le cadre de cette annexe.

Afin de s'affranchir du mouvement de précession autour de \vec{B}_0 , il est commode de se placer dans le référentiel $(x'Oy')$ tournant à la fréquence ω_0 par rapport au référentiel fixe xOy (Figure 2-2). Le phénomène de résonance est alors décrit comme un mouvement de basculement ou de rotation de \vec{M} autour de \vec{B}_1 (autour de Ox' dans le plan zOy'). Cependant, cet état est instable et, dès la fin de l'excitation, il y a relaxation vers l'équilibre.

L'aimantation longitudinale \vec{M}_z repousse alors progressivement (relaxation dite T_1) (figure 3 - bas), alors que l'aimantation transversale \vec{M}_{xy} décroît rapidement avec un déphasage des spins (relaxation dite T_2) (figure 2-3 - haut).

Ces processus de relaxation spin-réseau T_1 et spin-spin T_2 sont liés aux interactions microscopiques. En effet, lors de la relaxation longitudinale il y a émission d'énergie (échange thermique) par interaction avec le milieu moléculaire environnant (réseau). On a de façon générale $T_1 > T_2$.

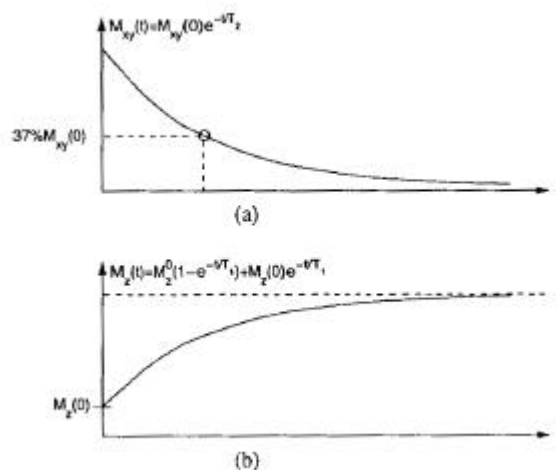


Figure 2-3 : Relaxation longitudinale (bas) et transversale (haut).

L'évolution de l'aimantation macroscopique reste tout de même décrite par les équations de Bloch qui s'écrivent dans le référentiel tournant :

$$\frac{d\vec{M}'(t)}{dt} = \gamma \vec{M}'(t) \wedge \vec{B}_{\text{eff}} - \frac{M_x \vec{i}' + M_y \vec{j}'}{T_2} - \frac{(M_z(t) - M_z(t=0^-))}{T_1} \vec{k} \quad [2.2]$$

avec

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 + \frac{\vec{u}_{\text{rf}}}{\gamma} \quad [2.3]$$

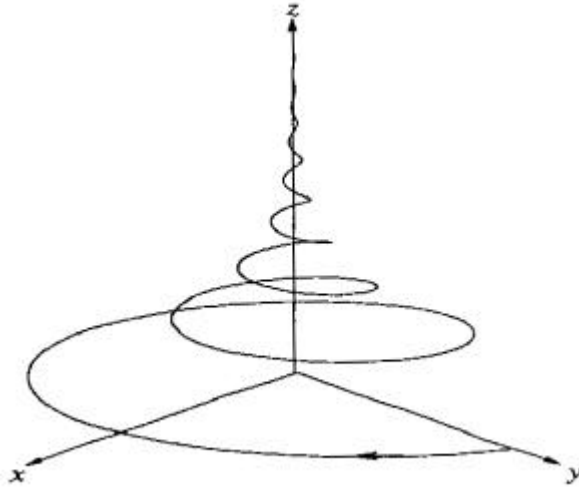


Figure 2-4 : Mouvement du vecteur aimantation lors du processus de relaxation.

Par exemple, suite à une impulsion radiofréquence 90° (angle de basculement $\alpha = 90^\circ$), l'aimantation transversale $\vec{M}_{xy}(\vec{r})$ de l'échantillon va relaxer avec la constante de temps T_2 . Dans le plan transverse au champ \vec{B}_0 va alors apparaître un faible signal électrique $S(t)$ appelé signal de précession libre (*Free Induction Decay* - FID), qui va être recueilli par l'antenne de réception.

Une forme générique de ce signal peut-être écrite sous la forme :

$$S(t) = \int_{\text{Objet}} M_{xy'}(\vec{r}, 0^+) e^{-\frac{t}{T_2(\vec{r})}} e^{-i\omega(\vec{r})t} d\vec{r} \quad [2.4]$$

avec

$$M_{x'y'}(\vec{r}, 0^+) = \frac{1}{4} \rho(\vec{r}) \frac{\gamma^2 \hbar^2}{kT} B_0 \quad [2.5]$$

où $\rho(\vec{r})$ représente le nombre de protons par unité de volume.

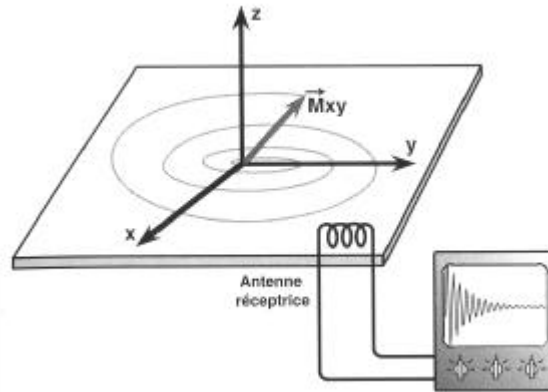


Figure 2-5 : Réception du signal $S(t)$.

Dans la pratique, ce signal est représenté sous la forme d'une sinusoïde amortie par une exponentielle de temps caractéristique T_2^* (figure 2-5), lié à la fois aux inhomogénéités du champ d'origine moléculaire, caractéristique de l'échantillon étudié, et aux inhomogénéités propres de \vec{B}_0 , liées aux qualités de l'appareil RMN et indépendantes du temps. Ce temps de relaxation T_2^* est beaucoup plus court que le temps de relaxation T_2 .

I.D. Echo de Spin

On décrit maintenant une séquence couramment utilisée, dite d'écho de spin, destinée à se débarrasser de ces inhomogénéités du champ principal externe. Son principe a été publié par Hahn dès 1955.

Suite à une impulsion radiofréquence 90° , l'aimantation transversale de l'échantillon objet va relaxer avec une constante de temps caractéristique T_2 , en faisant apparaître un faible signal électrique mesurable $S(t)$ appelé signal de précession libre.

Si au bout d'un temps $T_E / 2$ (demi-temps d'écho) après l'impulsion RF, une seconde impulsion RF de 180° est appliquée, celle-ci va inverser les déphasages sans modifier le sens de rotation des spins élémentaires. Les spins qui précessaient plus rapidement vont se trouver à présent en retard par rapport aux plus lents et comme les vitesses de précession (et les sens de rotation) restent identiques, au bout d'un temps T_E (temps d'écho), les spins seront de nouveau en phase engendrant ainsi un signal d'amplitude maximale, dit d'écho de spin. Il est à noter que l'impulsion de 180° ne permet de s'affranchir que des déphasages dus aux inhomogénéités propres de \vec{B}_0 qui sont constantes et non pas au déphasages aléatoires dus au inhomogénéités du champ d'origine moléculaire qui sont irréversibles.

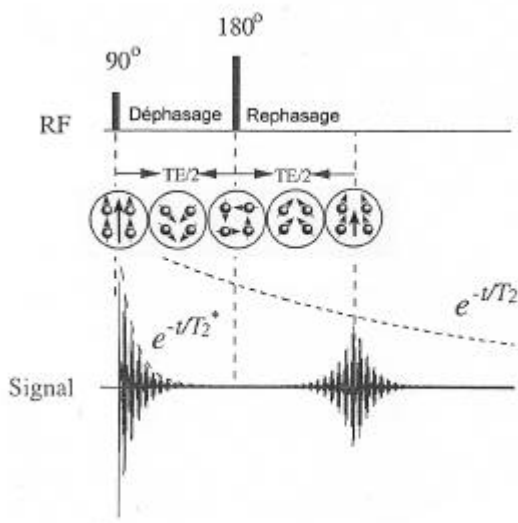


Figure 2-6 : Formation d'un signal d'écho de spin par une séquence d'impulsion 90° - $T_E/2$ - 180° . L'application d'une impulsion induit une FID qui disparaît rapidement lorsque les spins se déphasent. L'application d'une impulsion RF de 180° après une durée $T_E/2$ produit un écho au temps T_E après l'impulsion de 90° .

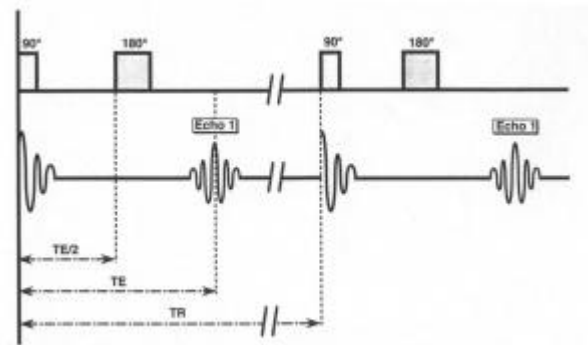


Figure 2-7 : Chronologie des impulsions RF et paramètres de la séquence d'écho de spin. Un cycle d'impulsions de 90° et 180° ne permet d'obtenir qu'une ligne de la matrice image. Pour obtenir les autres lignes, il va falloir répéter pour chaque ligne ce cycle élémentaire.

II. Principe de l'Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire

La technique de RMN fournit une information globale sur l'échantillon. On peut cependant espérer mesurer la dépendance spatiale du signal RMN, et donc la densité d'aimantation. En 1973, Lauterburg et Mansfield proposèrent d'utiliser des gradients de champ magnétique pour localiser spatialement le signal RMN. Les premières images furent des coupes de capillaires remplis d'eau et d'un poivron, mais dès 1976, Moor et Hinsaw obtiennent les premières images du corps humain. La résolution typiquement accessible est de l'ordre de $(1\text{mm})^3$.

Ainsi, comme n'importe quel autre outil d'imagerie tomographique, l'Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire (IRM) fournit une cartographie spatiale de l'information issue du signal RMN. Mais l'IRM a l'avantage de générer des images bidimensionnelles suivant n'importe quelle direction de coupe, ou bien encore des images volumétriques. De plus, le signal RMN provient directement de l'objet imagé (il n'est pas nécessaire d'injecter des isotopes radioactifs comme en tomographie à émission de positron). Enfin, il est possible d'imager spécifiquement différentes grandeurs (densité de spins, temps de relaxation T_1 et T_2) au moyen de paramètres directement contrôlables par l'opérateur. Ainsi, chaque image dépend fortement du protocole expérimental utilisé.

II.A. Tomographie RMN

La localisation spatiale du signal (ou codage spatial) fait appel à l'utilisation de gradients linéaires de champ magnétique \vec{G} , créés par des bobines de gradient et qui se superposent au champ magnétique principal \vec{B}_0 . Les spins situés en \vec{r} vont alors précesser avec une fréquence de Larmor généralisée :

$$\omega(\vec{r}) = \gamma(\vec{B}_0 + \vec{G} \cdot \vec{r}) = \omega_0 + \gamma \vec{G} \cdot \vec{r} \quad [2.6]$$

Chaque élément de volume $d\vec{r}$ contenant une densité volumique de spins $\rho(\vec{r})$ contribue au signal RMN d'une quantité :

$$dS(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) e^{-i\omega(\vec{r})t} e^{-t/T_2^*} d\vec{r} \quad [2.7]$$

Dans la suite, on fait abstraction de la dépendance temporelle commune à l'ensemble de l'échantillon :

$$S(t) \propto e^{-\left(i\omega_0 + \frac{1}{T_2^*}\right)t} \quad [2.8]$$

et l'on ne retient que le déphasage associé au gradient de champ magnétique :

$$\phi(\vec{r}, t) = \gamma \vec{G} \cdot \vec{r} \cdot t \quad [2.9]$$

En somme, la densité volumique de spin est codée par la phase $\phi(\vec{r}, t)$ dans le signal RMN :

$$S(t) = \int_{\text{Objet}} \rho(\vec{r}) e^{-i\phi(\vec{r}, t)} d\vec{r} \quad [2.10]$$

Par analogie avec la notion d'espace conjugué en transformation de Fourier, on définit le vecteur \vec{k} :

$$\vec{k} = \frac{\gamma \vec{G} t}{2\pi} \quad [2.11]$$

De sorte que l'on peut écrire :

$$S(\vec{k}) = \int_{\text{Objet}} \rho(\vec{r}) e^{-i2\pi \vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \quad [2.12]$$

La transformée de Fourier inverse de ce signal fournit alors la densité de spin :

$$\rho(\vec{r}) = \int S(\vec{k}) e^{i2\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} \quad [2.13]$$

II.B. Mise en place des événements d'une séquence IRM

La fréquence de l'onde RF sélectionne ainsi un plan de coupe perpendiculairement au gradient de sélection de coupe G_{ss} ("slice selection"). L'épaisseur du plan de coupe est fonction de la largeur de fenêtre $\Delta\omega$ de l'impulsion sélective RF, et de l'intensité du gradient selon la relation :

$$\Delta z = \frac{\Delta\omega}{\gamma G_{ss}} \quad [2.14]$$

Lorsque la fenêtre est large, la coupe est épaisse et inversement. A largeur de fenêtre égale, l'épaisseur est fonction de l'intensité du gradient. Si le gradient est élevé les coupes sont fines et inversement (figures 2-8 et 2-9).

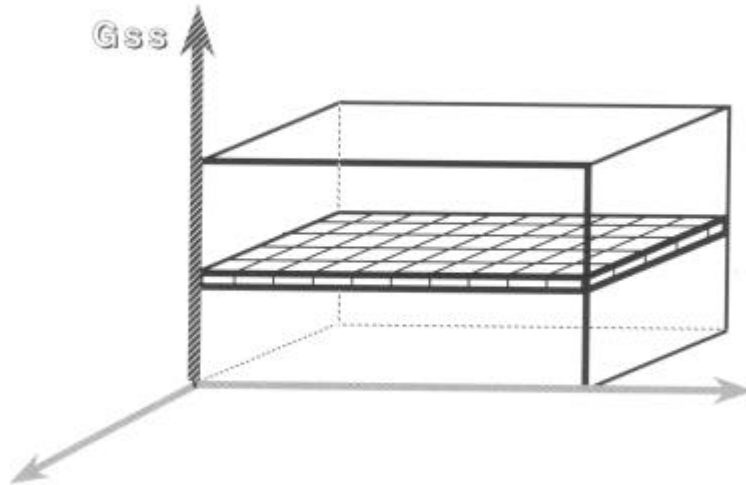


Figure 2-8 : Gradient de sélection de coupe.

Dans l'image d'un plan de coupe d'épaisseur Δz centrée en z_0 , l'intensité $I(x, y)$ de chaque pixel est tel que :

$$I(x, y) = \int_{z_0 - \Delta z/2}^{z_0 + \Delta z/2} \rho(x, y, z) dz \quad [2.15]$$

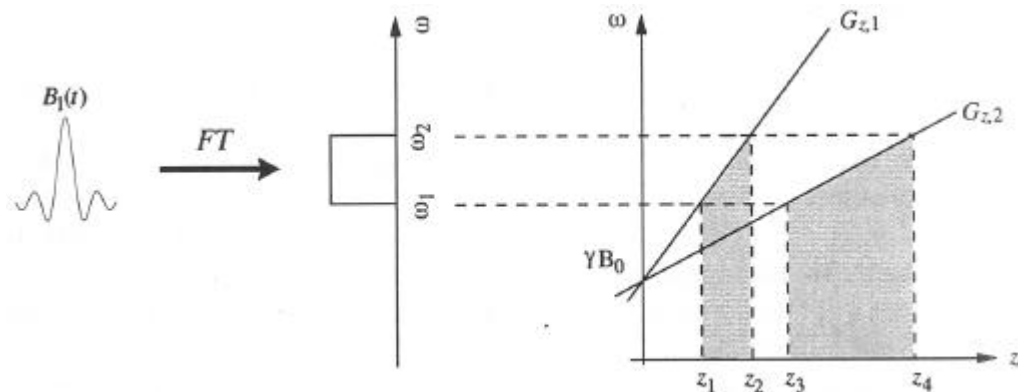


Figure 2-9 : Principe de la sélection de coupe au travers d'une impulsion sélective RF.

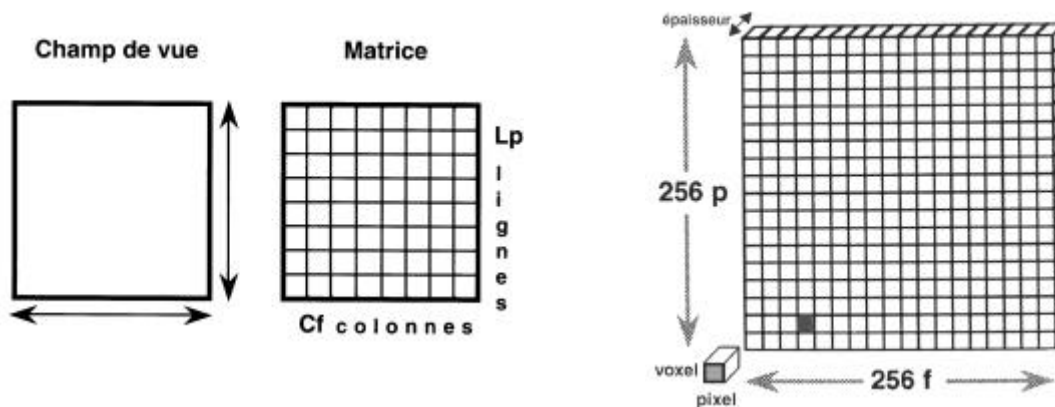


Figure 2-10 : Illustration des notions de champ de vue, plan de coupe, voxel et pixel.

Ayant sélectionné le plan de coupe au moyen d'un premier gradient G_{ss} , on va mesurer la densité de spin dans ce plan de coupe, dans une zone appelée champ de vue, divisée en L_p lignes et C_f colonnes (figure 2-10). La densité de spin est donc mesurée sur un voxel cubique. Chacun des pixels est localisé par l'application successive de deux gradients supplémentaires qui modifient la fréquence de précession et les déphasages des spins.

Le gradient de codage de phase G_ϕ (figure 2-11), appliqué avant la réception du signal, augmente la fréquence de précession dans chacune des lignes ainsi que le déphasage de ces lignes entre elles. A l'arrêt de l'application de G_ϕ , les moments magnétiques élémentaires précessent tous de nouveau à la fréquence angulaire ω_0 , mais leur décalage en phase subsiste.

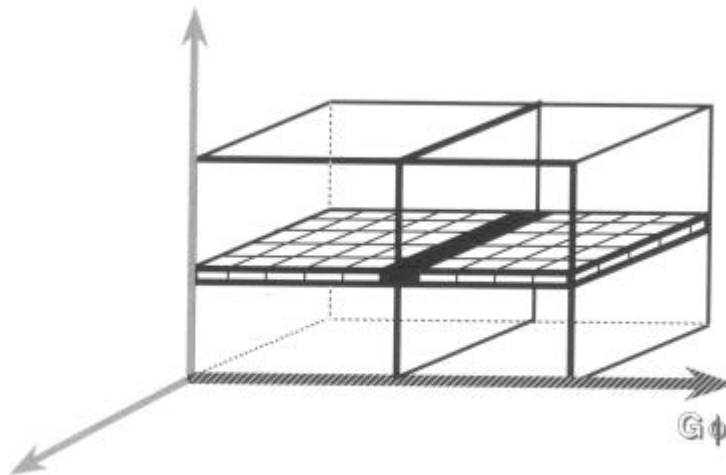


Figure 2-11 : Gradient de codage de phase.

Le gradient de codage de fréquence G_ω (dénommé également gradient de lecture) (figure 2-12), appliqué pendant la lecture du signal, augmente la fréquence de précession des spins dans chacune des colonnes de l'image. Dès l'arrêt du gradient, les protons vont précesser de nouveau à la fréquence ω_0 .

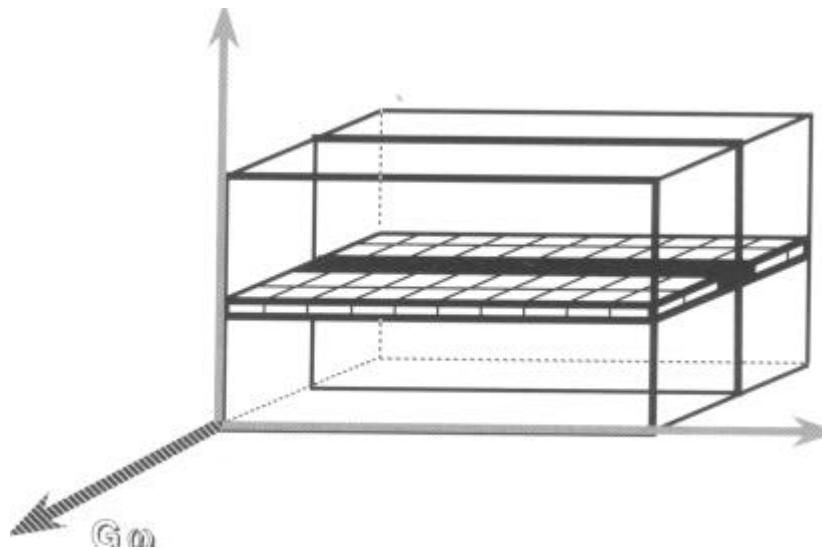


Figure 2-12 : Gradient de codage de fréquence.

Par contre, il faut appliquer G_x lors de la lecture du signal RMN $S(t)$ pour avoir un codage en fréquence, car dès l'arrêt du gradient les protons vont précesser de nouveau à la fréquence ω_0 .

Les gradients de phase et de fréquence agissent exactement de la même manière sur les spins : tous les deux modifient la fréquence de précession des spins, mais également leurs déphasages. La différence des modes d'action provient du moment de leur application :

- Le gradient de codage de phase est appliqué avant la réception du signal, il ne fait que déphaser les protons des lignes entre-elles.

- Le gradient de codage de fréquence est mis en place pendant la lecture du signal, seul le codage en fréquence est utile pour la réception du signal.

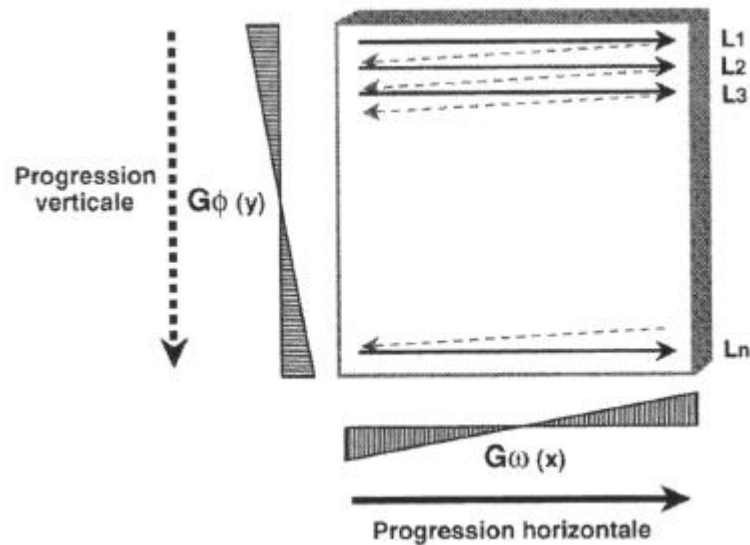


Figure 2-13 : Illustration du principe d'acquisition d'un plan de coupe.

Cette reconstruction d'image suivant la séquence de gradients de champ expliquée ci-dessus ne permet d'obtenir l'information que pour une ligne. Notre matrice image est constituée de L_p lignes, il faut donc L_p étapes d'incrémentation du gradient de codage de phase (en modifiant incrémentalement l'intensité de celui-ci) pour avoir l'ensemble de l'image (figure 2-13). Par contre, les C_f colonnes de la matrice correspondent chacune à une bande de fréquence déterminée. Il n'y a donc aucune nécessité d'incrémenter pour chaque colonne le gradient de codage de fréquence.

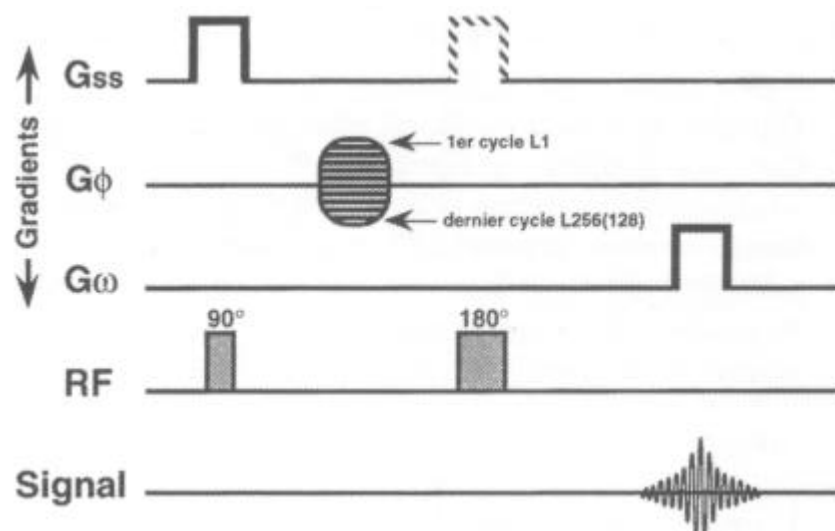


Figure 2-14 : Mise en place des impulsions RF et des trois gradients qui vont se succéder

au cours d'une même excitation.

II.C. Séquence d'imagerie d'écho de spin

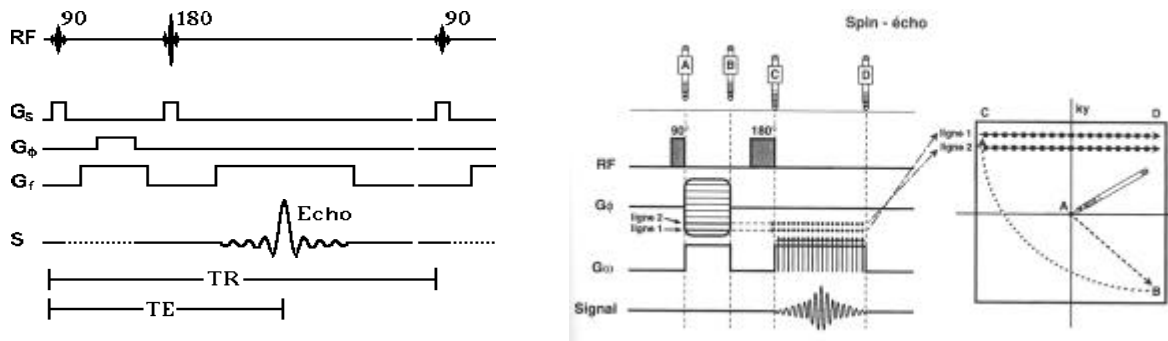


Figure 2-15 : Séquence d'imagerie détaillée de type Echo de Spin.

Le cycle que nous venons de décrire, dans le paragraphe précédent ne permet d'obtenir qu'une ligne de la matrice image. Pour obtenir les autres lignes, il va falloir répéter, pour chaque ligne, la séquence d'impulsion $90^\circ - T_E / 2 - 180^\circ$. Dans cette séquence, le temps d'écho correspond au temps de mesure et le temps de répétition T_R à l'intervalle de deux cycles élémentaires (figure 2-15). Le temps T_R correspond ainsi au temps de passage d'une ligne à l'autre mais également au temps de repousse stabilisé de l'aimantation longitudinale de la tranche sélectionnée.

La séquence d'écho de spin est très utilisée en imagerie. Elle permet d'obtenir des images d'excellente qualité. Son principal inconvénient est qu'elle est relativement longue car on doit répéter la séquence d'impulsion pour chaque ligne de l'image. De plus, il est également difficile d'obtenir des images avec un temps d'écho T_E court, ce qui peut-être un facteur limitant si l'on doit étudier des écoulements rapides.

II.D. Temps d'acquisition

Pour améliorer la qualité de l'image, il est nécessaire de repasser plusieurs fois sur chaque ligne. Ainsi le temps d'acquisition d'une image T_{AC} dépend du temps de répétition T_R , du nombre de ligne L de la matrice associé au champ de vue et du nombre d'excitations N_{EX} :

$$T_{AC} = T_R \cdot L_P \cdot N_{EX} \quad [2.16]$$

Pour réduire ce temps d'acquisition, on ne peut intervenir essentiellement qu'au niveau du nombre d'excitations. Celui-ci est directement dépendant du rapport signal/bruit qui est proportionnel à $B_0^{7/4}$. Ainsi, il faut augmenter l'intensité du champ primaire pour augmenter le rapport signal/bruit.

III. Vélométrie RMN

La RMN est également capable de distinguer des particules en écoulement par rapport à celles qui sont immobiles

La vélocimétrie RMN requiert une certaine durée. Elle est donc plus appropriée pour des phénomènes stationnaires ou bien dont le comportement est lentement variable dans le temps.

On peut distinguer deux méthodes de vélocimétrie. Celles qui reposent sur le temps de vol fournissent une estimation de la vitesse. Celles qui reposent sur le déphasage des spins permettent une mesure précise de la vitesse.

III.A. Imagerie de flux

Le mouvement des spins modifie le signal IRM (au niveau de la phase), et peut donc perturber la mesure. En retour, ces artefacts correctement analysés permettent de mesurer ce mouvement.

Dans un premier temps nos recherches se sont orientées vers des techniques de contraste de phase. Cependant ceci n'a pas été concluant du fait de l'échec de la calibration de cette séquence. En effet, le temps minimum nécessaire à la réalisation de cette séquence était trop long par rapport au temps imparti à la calibration (2 minutes). Nous nous sommes donc orientés vers une situation où le plan de coupe est choisi parallèle au flux.

III.B. Flux perpendiculaire au plan de coupe : Vélométrie par temps de vol.

Les flux de spins entrant et sortant à la vitesse V de la tranche d'épaisseur δz entre deux impulsions modifient l'intensité du signal. D'une part, le signal peut augmenter du fait que le flux renouvelle les spins saturés par des spins non saturés (phénomène d'entrée de coupe). Cet effet sera maximal si le temps de transit est égal au temps de répétition T_R , soit $V = \frac{\delta z}{T_R}$. En revanche, il faut aussi que les spins ayant subi l'impulsion de 90° n'aient pas encore quitté la tranche au moment de l'impulsion de 180° (phénomène de sortie de coupe), c'est à dire que le temps de transit soit inférieur au temps de la séquence d'écho de spin, soit $V = \frac{2\delta z}{T_E}$. Au fur et à mesure que la vitesse augmente, on observe que l'intensité du signal commence par augmenter jusqu'à un maximum, puis se met à décroître vers zéro.

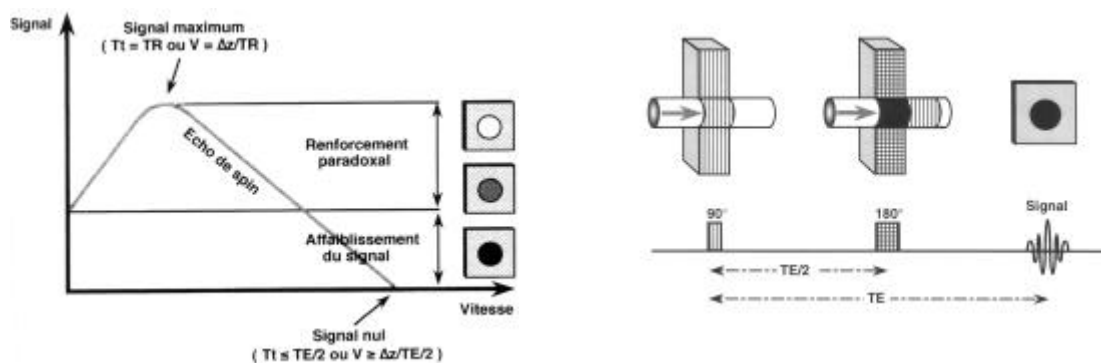


Figure 2-16 : Phénomène d'entrée et de sortie de coupe (gauche). Technique du temps de vol (droite).

Etant donné que les modifications de contraste entraînées par les phénomènes d'entrée et de sortie de coupe dépendent de la vitesse d'écoulement, certains auteurs ont proposé de calculer la vitesse à partir de l'intensité du signal des écoulements perpendiculaires à la coupe. Ces méthodes sont actuellement abandonnées car elle présentent deux inconvénients : d'une part, la courbe donnant l'intensité du signal en fonction de la vitesse n'étant pas monotone, une même intensité peut représenter deux vitesses différentes; d'autre part, le contraste dépendant aussi des temps de relaxation, il serait nécessaire de le mesurer pour en déduire la vitesse, ce qui aboutirait à des séquences d'imagerie très longues.

Par contre, des méthodes dites de temps de vol ont été décrites pour suivre le fluide entrant ou sortant : on peut, par une bande de signal intense, distinguer les parties stationnaires du fluide car ce dernier, étant en mouvement entre l'impulsion sélective et la mesure, est sorti du plan de coupe entraînant avec lui son signal jusqu'à une certaine distance perpendiculaire à la direction de sélection de coupe. La mesure de la distance parcourue pendant le temps d'écho permet de connaître la vitesse moyenne d'écoulement sur cette période.

III.C. Flux parallèle au plan de coupe : Imagerie de phase

III.C.1. Principe de vélocimétrie par codage de phase

On a vu qu'un simple gradient induisait un déphasage même pour des spins immobiles. L'idée consiste alors à appliquer un deuxième gradient de même intensité mais de polarité inverse qui, pour des spins immobiles va induire un deuxième déphasage complémentaire du premier, de sorte que le déphasage total soit nul (figure 2-17). Pour des spins en mouvement, il n'y a plus compensation des deux déphasages, de sorte que l'application de ce gradient bipolaire G^-/G^+ (inclus dans le gradient de lecture) permet de sélectionner le déphasage lié au mouvement.

Ainsi, l'expression :

$$\phi(\vec{r}, t) = \gamma \int_0^t \vec{G}(\tau) \cdot \vec{r}(\tau) d\tau \quad [2.17]$$

montre que le déphasage permet une mesure de la composante de la vitesse dans la direction du gradient de lecture.

Considérons, comme exemple démonstratif, le cas simple d'un mouvement de translation uniforme selon la direction z : $\vec{v} = v_z \vec{e}_z$ soit $z(t) = z(0) + v_z t$. Le choix d'un gradient de lecture dans la direction du mouvement $\vec{G}(t) = G_z(t) \vec{e}_z$ permet la mesure de la composante v_z :

$$\begin{aligned}
 \phi_z(t) &= \gamma \int_0^t G_z(\tau) \cdot (z(0) + v_z \cdot \tau) d\tau \\
 &= \gamma z(0) \int_0^t G_z(\tau) d\tau + \gamma v_z \int_0^t \tau G_z(\tau) d\tau
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Le premier terme représente le déphasage spatial induit par le gradient de lecture lié au codage de phase usuel. Le deuxième terme correspond au déphasage induit, cette fois-ci, par le mouvement des spins le long du gradient de champ. On pose par la suite.

$$\Delta\phi_z(t) = -\gamma v_z \int_0^t \tau G_z(\tau) d\tau
 \tag{2.19}$$

On s'aperçoit clairement que le déphasage $\Delta\phi_z(t)$ dépend de la structure du gradient $\vec{G}(t)$.

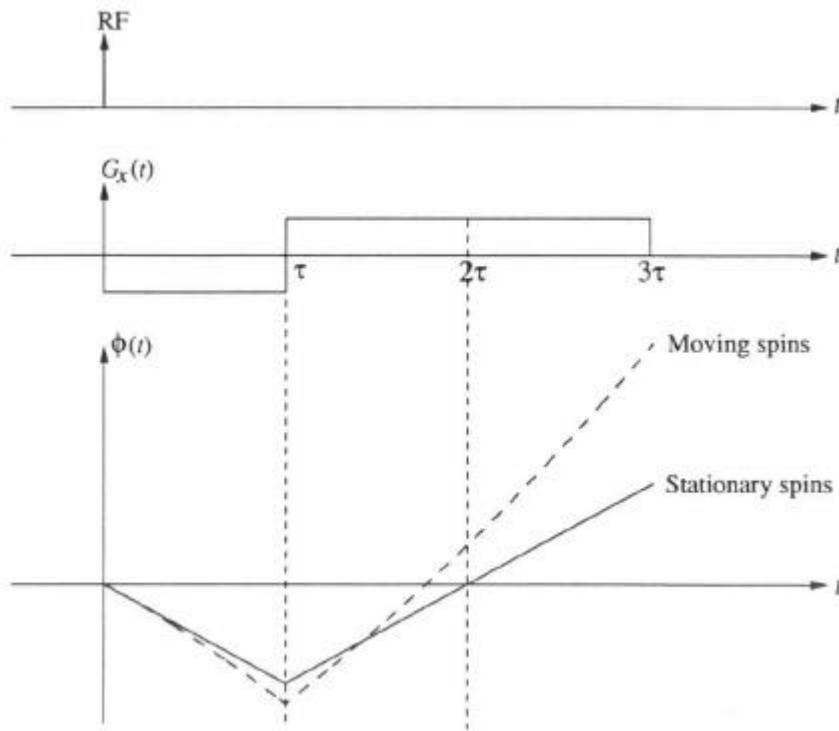


Figure 2-17 : Séquence bipolaire.

Comme exemple d'application, on peut considérer la séquence bipolaire classique de gradient de lecture illustrée à la figure 2-17 à partir de laquelle on montre aisément que durant la période de déphasage $0 \leq t \leq T_E/2$:

$$\Delta\phi_z(t) = -\gamma \int_0^t v_z \tau G_z(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} \gamma G_z v_z t^2 \quad [2.20]$$

et durant la période d'acquisition du signal RMN $T_E/2 \leq t \leq T_E$:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_z(t) &= -\frac{1}{2} \gamma G_z v_z \left(\frac{T_E}{2} \right)^2 + \gamma \int_{T_E/2}^t v_z G_z(\tau) \tau d\tau \\ &= \frac{1}{2} \gamma G_z v_z \left(t^2 - \frac{T_E^2}{2} \right) \end{aligned} \quad [2.21]$$

Ainsi à l'instant $t = T_E$ où le signal recueilli est maximum, le déphasage lié au mouvement des spins est :

$$\Delta\phi_z(T_E) = \frac{1}{4} \gamma G_z v_z T_E^2 \quad [2.22]$$

Au bout du temps T_E , le premier terme s'annule, et le déphasage associé au mouvement est proportionnel à la vitesse d'écoulement, et au carré du temps d'application du gradient bipolaire. L'étude du déphasage pour une séquence écho de spin, comme l'ont établi Carr et Purcell redonne une dépendance identique.

D'autre part, il est possible, avec l'utilisation d'un double gradient bipolaire de coder également l'accélération, la phase étant alors nulle pour les spins se déplaçant à vitesse constante.

III.C.2. Imagerie par contraste de phase

Ces méthodes sont basées sur l'expression de la phase lorsque les spins sont animés d'un mouvement. On vient de voir que la phase de l'aimantation lors de l'écho est directement proportionnelle à la vitesse, et l'on peut donc admettre que la mesure de cette phase donnera la vitesse. La méthode la plus simple consiste à utiliser la transformation de Fourier : on sait que celle-ci permet de calculer non seulement le module, mais également la phase de

l'aimantation. En représentant une cartographie de phase (sur laquelle le contraste dépend de la phase de l'aimantation), on génère en fait une véritable cartographie des vitesses.

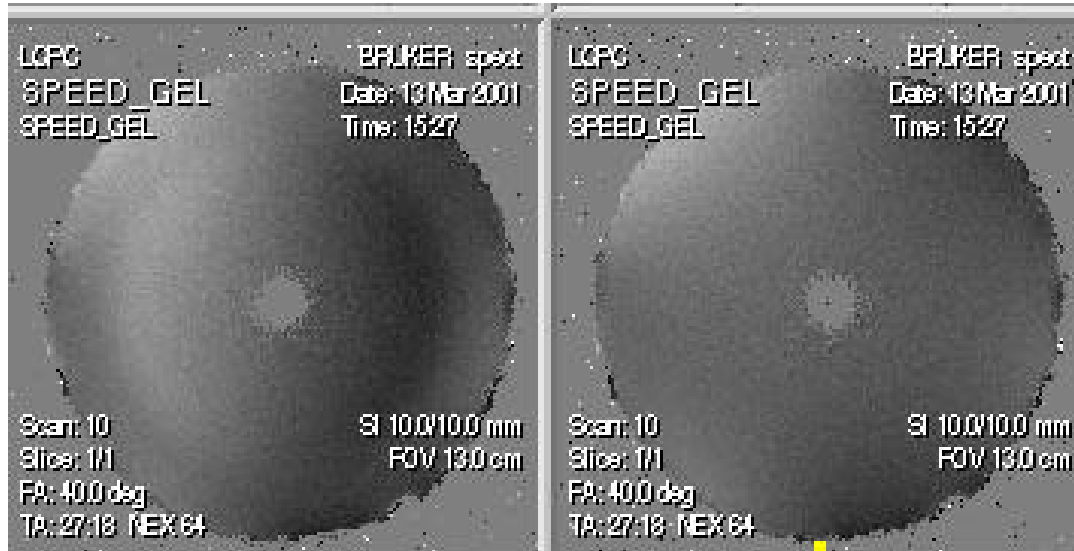


Figure 2-18 : Exemple de cartographie des vitesses par une imagerie de phase. L'image de gauche représente un rhéomètre de type Couette en mouvement, celle de droite le système au repos [Raynaud01].

C'est donc la phase du signal qui contient l'information sur la vitesse, ce qui nous conduit donc à travailler sur le signal complexe, c'est à dire la partie réelle $S_R(t)$ ou imaginaire $S_I(t)$ du signal, ou encore sur quantité $\arctan\left(\frac{S_I}{S_R}\right)$ (mais l'erreur numérique introduite par le calcul de la fonction arctangente ne permet pas d'avoir des qualités d'images suffisantes). [Moran82] propose également de travailler sur l'image imaginaire plutôt que l'image de phase. L'image imaginaire a un contraste proportionnel à la phase pour les faibles valeurs de celle-ci et permet ainsi de s'affranchir des erreurs liées à l'utilisation de la fonction arctangente. D'autre part, pour pouvoir utiliser quantitativement ces images, il est nécessaire que la variation de phase correspondant à la vitesse maximale soit inférieure à π . Cette technique a été proposée par [Van Dijk83]. Par le choix de la direction du gradient de lecture, toutes les composantes du mouvement dans un plan de coupe donné peuvent être mesurées [Moran82].

III.C.3. Imagerie de flux zébrée

Cette méthode développée par [Van Wedeen85] utilise les images de type réel, et, pour visualiser les lignes de flux, l'auteur introduit un battement dans l'image. Le battement est obtenu en introduisant un décalage au niveau des signaux temporels. Le battement se manifeste sur l'image par des zébrures qui sont rectilignes en absence de mouvement. Elles prennent la forme d'isopotentielle perpendiculaires aux lignes de flux en présence d'un écoulement. On prend donc par la suite systématiquement les parties réelles $S_R(t)$ de nos signaux.

L'image de flux zébrée mise au point par Van Wedeen présente un grand intérêt pour la détermination de la forme des isopotentielle des lignes de courant. Le principe d'obtention est le suivant.

En l'absence de mouvement, la phase du signal RMN est nulle au moment de l'écho d'une séquence écho de spin. Si par contre, un décalage temporel Δa est introduit sur le signal d'écho acquis par le gradient de lecture, nous obtenons alors dans l'espace conjugué une translation globale du plan de Fourier d'une quantité :

$$\Delta \vec{k}_a = \frac{\gamma}{2\pi} (t - (T_E + \Delta a)) \vec{G} \quad [2.23]$$

Le nouveau signal conjugué $S(\vec{k}')$ est donc tel que :

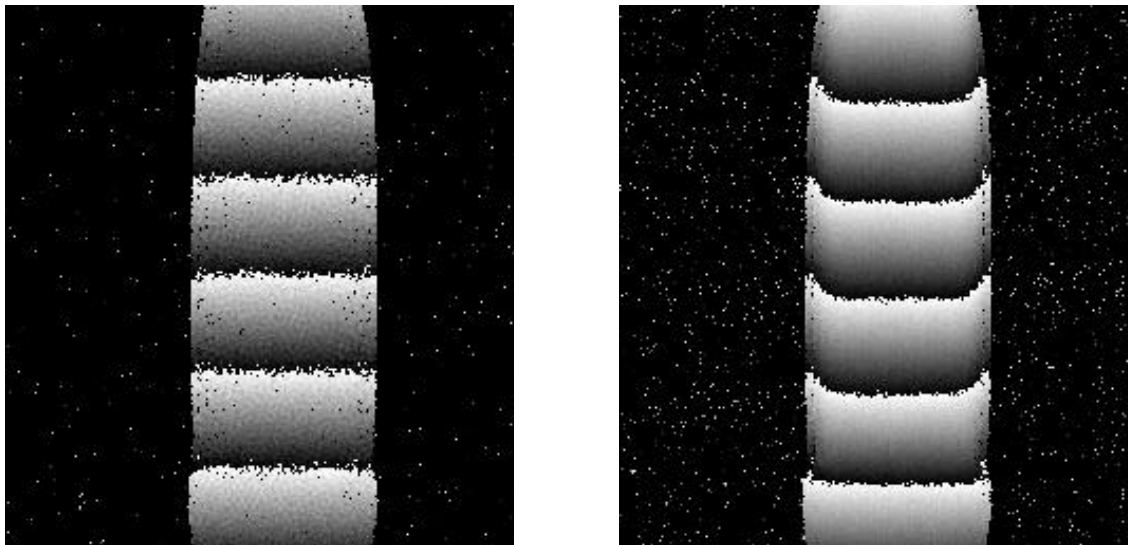
$$\begin{aligned} S(\vec{k}') &= S(\vec{k} - \Delta \vec{k}_a) \\ &= e^{i2\pi \vec{r} \cdot \Delta \vec{k}_a} S(\vec{k}) \end{aligned} \quad [2.24]$$

La nouvelle fonction image associée par la transformée de Fourier inverse se trouve donc modulée spatialement sous la forme :

$$\begin{aligned} I'(\vec{r}) &= \mathfrak{F}^{-1} [S(\vec{k} - \Delta \vec{k}_a)](\vec{r}) \\ &= e^{i2\pi \vec{r} \cdot \Delta \vec{k}_a} \mathfrak{F}^{-1} [S(\vec{k})](\vec{r}) = e^{i2\pi \vec{r} \cdot \Delta \vec{k}_a} I(\vec{r}) \end{aligned} \quad [2.25]$$

avec $\lambda = \frac{2\pi}{\|\Delta\vec{k}_a\|} = \frac{4\pi^2}{\gamma G \Delta a}$ la périodicité des zébrures.

Cette technique introduit donc une modulation. Les images réelles présentent alors des raies alternativement sombres et brillantes dans la direction du gradient de lecture, correspondant à la périodicité λ imposée par le décalage du signal RMN introduit en présence du gradient de lecture.



*Figure 2-19 : Exemple d'imagerie zébrée appliquée aux écoulements en conduite verticale
(gauche: repos - droite : écoulement)*

En l'absence de tout autre déphasage (absence de mouvement), les raies sont parfaitement parallèles entre-elles. S'il existe maintenant un terme de phase supplémentaire, lié à un mouvement dans la direction du gradient de lecture, ces lignes prennent la forme du profil de vitesse de l'écoulement. La phase étant proportionnelle à la vitesse, il est possible de mesurer la vitesse à partir de ces images. La largeur d'une raie sombre ou d'une raie brillante correspond à un déphasage de π . On note bien que un temps d'écho T_E court est un facteur limitant pour les écoulements rapides.

III.C.4. Imagerie par marquage magnétique : "Tagging"

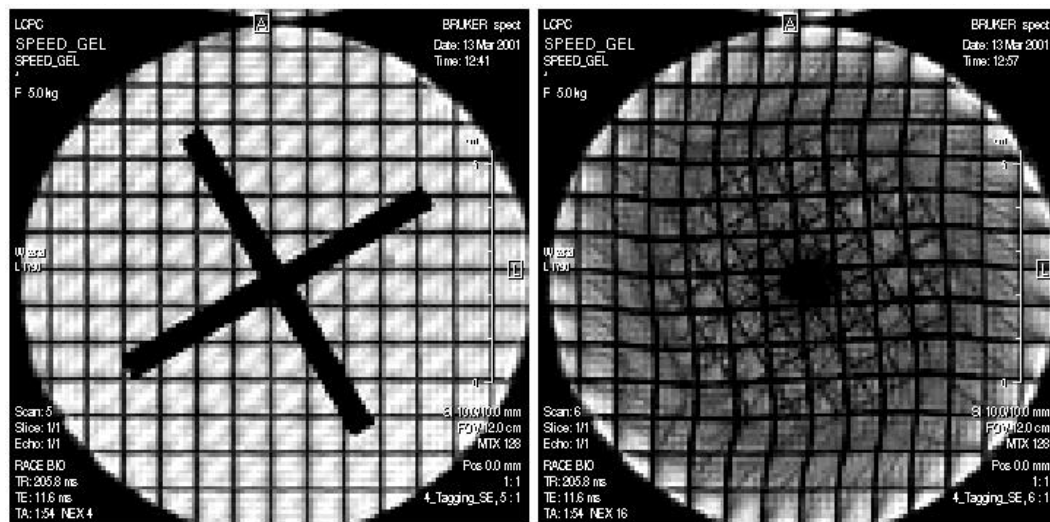


Figure 2-20 : Marquage d'une grille magnétique. Suivi de l'évolution de cette dernière par déformation.

Le tagging consiste à appliquer une succession de bandes de saturation sélectives avant le module d'imagerie afin d'obtenir un quadrillage déformable. La déformation du quadrillage est liée à un mouvement des spins supérieur à la fréquence d'encodage spatial d'un pixel (application principale : artère du coeur).

IV. Conclusions

Cela fait plus de cinquante ans que le principe de la résonance magnétique nucléaire (RMN) a été découvert. C'est désormais une technique importante en physique et en biologie dont on peut lister les avantages et limitations. Ses avantages (en dehors de la possibilité de vélocimétrie) sont :

- le caractère non-invasif, c'est à dire qu'aucun contact direct avec l'échantillon n'est nécessaire pour retirer l'information
- l'absence de rayonnement ionisant (contrairement à la tomographie à rayon X),

- le grand nombre de pixels ou de voxels de mesure en une seule expérience,
- la possibilité de faire des projections ou des coupes dans toutes les directions (par rapport à des techniques de diffusion qui nécessitent de diriger un faisceau dans la direction de l'échantillon).

Ses limitations sont :

- la sensibilité restreinte à certains noyaux atomiques (surtout les noyaux d'hydrogène), mais la gamme des matériaux qui peuvent être étudiés par RMN est très vaste,
- son inadaptation pour les matériaux magnétiques ou conducteurs (problème pour les matériaux géologiques qui contiennent des particules ferromagnétiques),
- le temps d'accumulation du signal, mais cela semble de moins en moins être un facteur limitant de part l'émergence d'imageurs à champ fort et de nouveaux types de séquences.

ANNEXE 3

IMAGERIE

ANNEXE 3

IMAGERIE

Deux types d'écoulement ont été étudiés par imagerie : en géométrie bidimensionnelle (sur plan incliné Chap III et en conduite verticale Chap IV) et en géométrie tridimensionnelle (en conduite verticale - Chap IV). Dans le premier cas, on a utilisé les méthodes mises au point dans le cadre de la thèse d'Emmanuel Azanza [Azanza98], que nous résumerons rapidement au § I. Pour les écoulements tridimensionnels, les mesures sont faites à la paroi, et l'on a utilisé une technique, mise au point par Pascal Moucheront [Moucheront00], fondée sur des techniques de corrélation d'image. Cette même méthode a aussi été utilisée pour le traitement des images issues de l'étude de vélocimétrie IRM (cf. Chap IV § III.C). Cette deuxième méthode fera l'objet du § II.

I. Ecoulements bidimensionnels

Le canal d'écoulement (figure 3-1) est constitué de deux plaques de verre de 2 m de longueur, 60 cm de hauteur et de 1 cm d'épaisseur. L'écartement entre les parois est ajusté grâce à des cales de précision. Cet écartement doit être supérieur à la taille des particules pour éviter d'éventuels blocages, mais également pas trop important pour conserver un caractère bidimensionnel à l'expérience. Les plaques de verres sont serrées en plusieurs points répartis sur toute la longueur du canal pour minimiser leur flexion. L'ensemble repose sur une table en granite pour assurer une bonne verticalité du canal et amortir les éventuelles vibrations dues aux écoulements. La plage d'inclinaison θ du canal est comprise entre 0° et 90° par rapport à l'horizontale. L'alimentation se fait par une trémie bidimensionnelle. Les particules s'écoulent sur un fond rugueux.

Le caractère bidimensionnel de l'écoulement permet d'accéder au mouvement de l'ensemble des grains. On procède par ombroscopie. La caméra numérique rapide a une vitesse d'acquisition de 230 images par seconde. Un stroboscope, synchronisé et placé en arrière du dispositif, permet, avec ces flashes d'une durée moyenne de 10 μ s, d'obtenir des images nettes et très contrastées en dépit du mouvement rapide des particules. Un diffuseur de

lumière placé sur la paroi du canal accroît la qualité des images en uniformisant l'intensité lumineuse de ces dernières. On peut ainsi enregistrer des films de quelques centaines d'images (6 s). Grâce à une carte d'acquisition rapide, ces images sont stockées dans la mémoire vive d'un PC en 256 niveaux de gris et avec une résolution de 256×256 pixels, puis sauvegardées sur le disque dur.

Un traitement d'image permet d'extraire la position de l'ensemble des grains, et ainsi de mesurer certaines grandeurs moyennes relatives à la structure (compacité) ou à la cinématique (vitesse de translation et de rotation, dans le cas des pentagones), voire les fluctuations de vitesse.

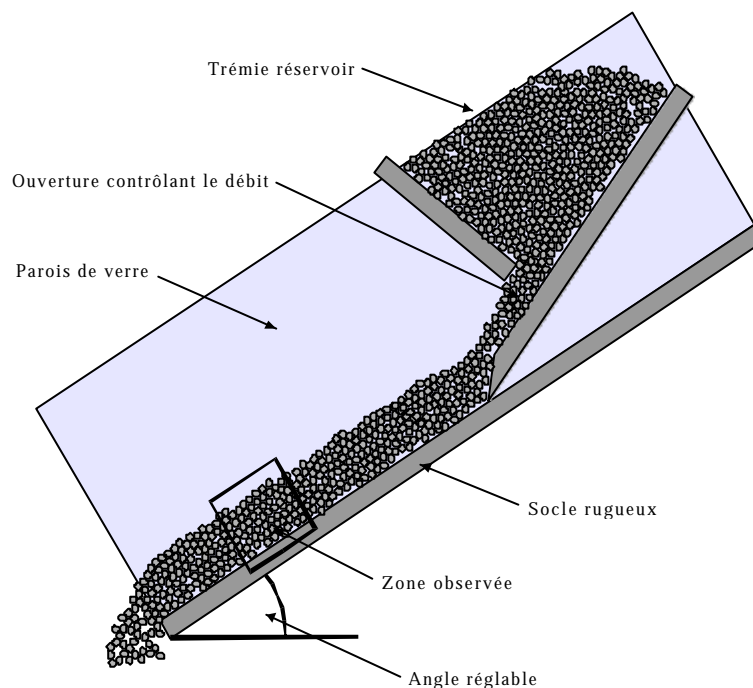


Figure 3-1 : Canal d'écoulement bidimensionnel.

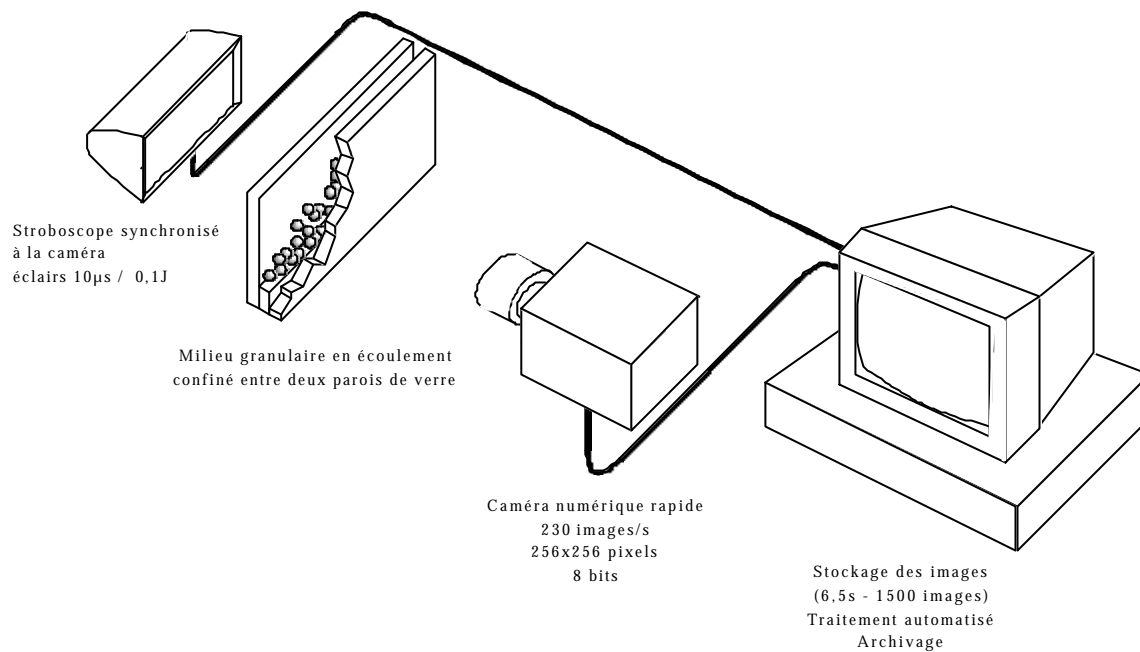


Figure 3-2 : Dispositif d'imagerie.

II. Ecoulements tridimensionnels

On utilise la même caméra numérique rapide pour filmer l'écoulement à la paroi. Cette fois-ci, on doit éclairer par devant, et l'on peut dans certaines conditions, suivre les reflets sur les grains.

L'écoulement est supposé uniforme selon la direction y parallèle à la paroi. On cherche en revanche à déterminer le profil de vitesse $v_y(x)$ selon la direction x perpendiculaire à cette paroi.

Autour de chaque position x , on considère une bande de largeur quelques pixels, parallèle à la paroi, pour laquelle on détermine le profil d'intensité moyenne à l'instant n (image n) $I(y,n)$ (voir figure 3-4).

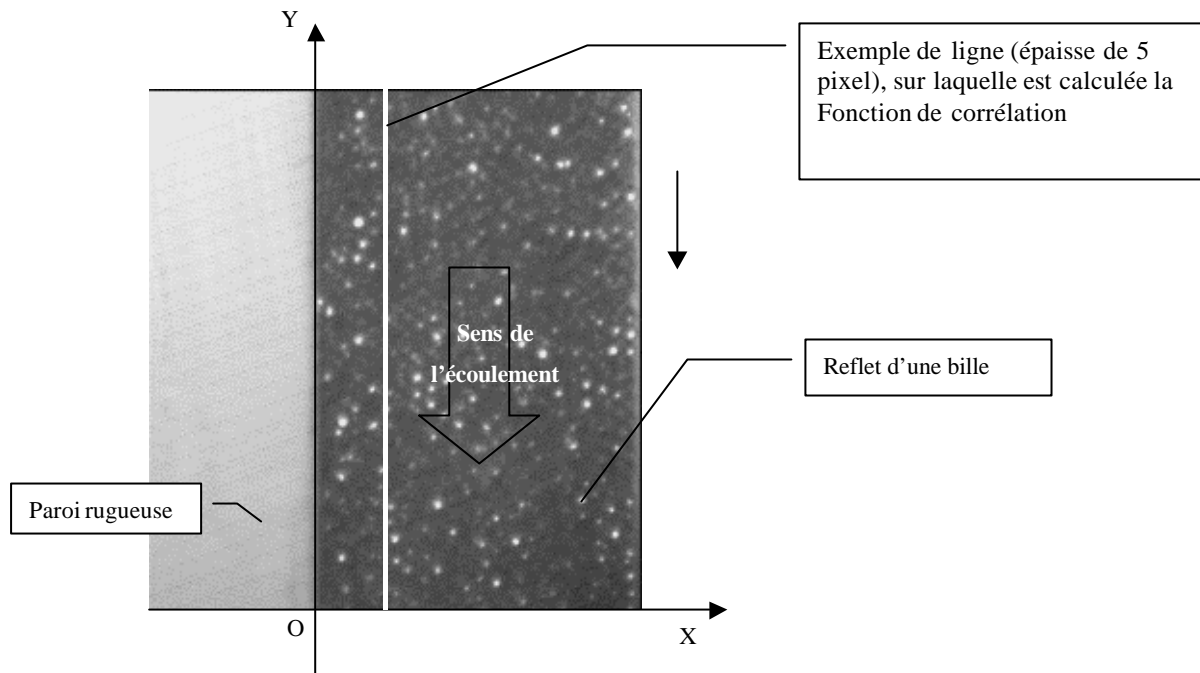
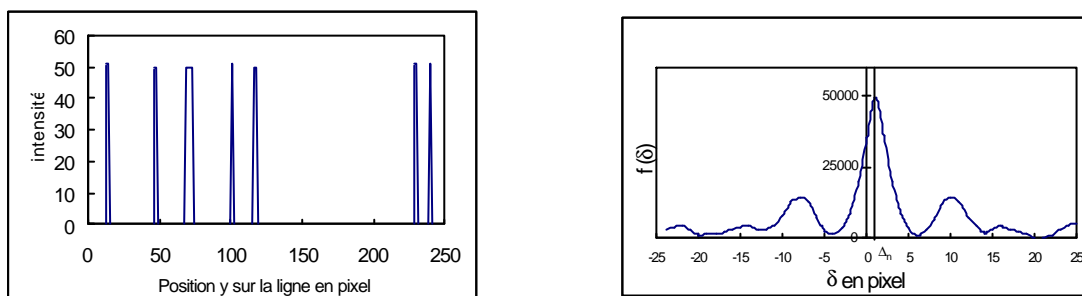


Figure 3-3 : Principe du traitement d'image.

Figure 3-4 : Intensité $I(y,n)$ et fonction de corrélation.

La fonction de corrélation :

$$F(\delta, n) = \int I(y, n) I(y + \delta, n + 1) dy \quad [3.1]$$

présente un maximum $\Delta(n)$ (figure 3-4) qui indique la vitesse à la position x et à l'instant n , à partir de la taille du pixel et de la durée entre deux images.

Cette même technique a été utilisée pour analyser les images issues des mesures par IRM. Compte-tenu de la méthode d'imagerie zébrée, les profils d'intensité ont l'allure

périodique de la figure 3-4 (image au repos et en écoulement), et la fonction de corrélation de est indiquée sur la figure 3-4.

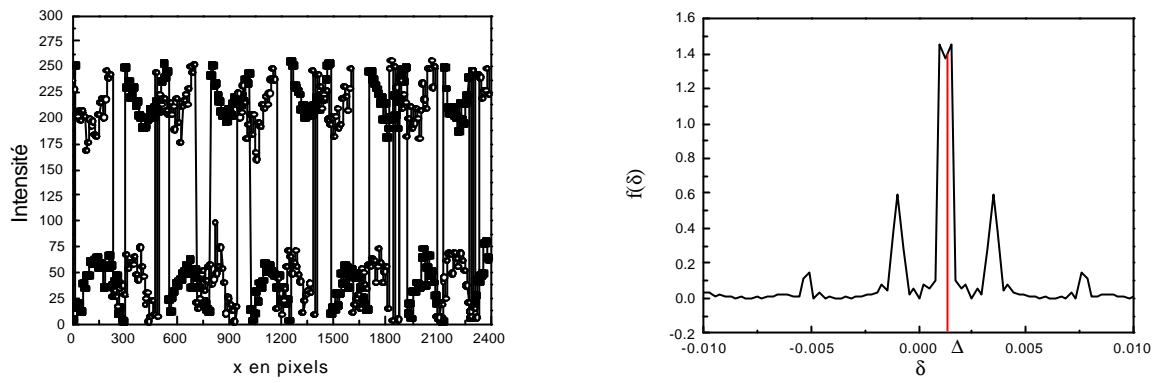


Figure 6-4 : Profil d'intensité dans une bande au repos (○) et en écoulement (■) et fonction de corrélation.

ANNEXE 4

DYNAMIQUE DES CONTACTS

ANNEXE 4

DYNAMIQUE DES CONTACTS

Les deux méthodes décrites au Chap I § III.C (dynamique moléculaire et méthode collisionnelle) rencontrent des difficultés pour traiter les régimes d'écoulement dense, de multi-contact, ou existent des amas de plus de deux particules en contact.

Contrairement à la loi de Newton qui prévoit que deux solides en contact avant un choc le restent à l'issue, l'expérience montre que certains contacts s'ouvrent lorsqu'une particule vient heurter un empilement de particules ("berceau de Newton"). En effet l'impulsion de la particule incidente se propage à travers le réseau de contacts sous forme d'onde [Falcon98]. Une telle collision doit donc être traitée en considérant l'ensemble du réseau des contacts car ses effets ne sont pas localisés. C'est un processus collectif qui ne peut être réduit aux chocs binaires. Il est donc nécessaire de formuler les lois de contact de manière plus générale afin de traiter de la même façon les contacts maintenus et les collisions, mais également pour prendre en compte l'ensemble du réseau.

Une méthode de simulation numérique est particulièrement adaptée à ce type de problème. Il s'agit de la dynamique des contacts. Cette méthode a été mise au point par Moreau et Jean dans les années 1980 [Moreau88a-93-94-96, Jean92-93-95, Radjai95], et appliquée avec succès à différents problèmes, statiques [Radjai96], quasi-statiques [Moreau97], ou dynamiques [Moreau93-95, Azanza98].

L'originalité de cette méthode réside dans l'écriture de lois de contact généralisées qui permettent de décrire les contacts maintenus et les collisions de la même façon, de traiter ainsi correctement les collisions multiples, et sans recourir à une régularisation des lois de contact. Cette méthode se réduit à la méthode collisionnelle dans la limite d'un système dilué. Une généralisation de ces idées à des interactions plus générales a été proposée par Frémond [Cholet98, Dimnet02].

I. Lois de contact généralisées

Les équations de la dynamique pour un ensemble de corps rigides avec contact frottant sont reformulées au sens des mesures, c'est à dire intégrées sur un pas de temps infinitésimal. Les forces de contact et les forces développées au cours des chocs sont toutes deux remplacées par des percussions. Il n'y a plus de différence entre elles.

Moreau a reformulé la condition de non-interpénétration de Signorini en reliant la percussion normale P_N de non-interpénétration non plus à la distance mais à la vitesse des particules. Afin de pouvoir traiter les collisions, Moreau a introduit une vitesse formelle \bar{v}_N , moyenne des vitesses avant et après le choc pondérée par un coefficient ρ_N , qui modélise l'inélasticité des collisions :

$$\bar{v}_N = \frac{v_N^+ + \rho_N v_N^-}{1 + \rho_N} \quad [4.1]$$

Considérons d'abord le cas d'une assemblée de grains identiques (disques ou sphères) de rayon R , masse m , et moment d'inertie $I = k^2 m R^2$ ($k^2 = 1/2$ pour un disque, $2/5$ pour une sphère).

En injectant cette relation dans la conservation de la quantité de mouvement (Eq. (I-5)), il vient :

$$P_N = \frac{m}{2}(1 + \rho_N)(\bar{v}_N - v_N^-) \quad [4.2]$$

ce qui est exprimé sur le graphe de Signorini généralisé, figure 4-1a.

En considérant le cas d'une collision binaire ou l'on souhaite $\bar{v}_N = 0$, on s'aperçoit que le coefficient ρ_N s'identifie au coefficient de restitution normal e_N qui mesure la perte d'énergie cinétique locale. Dans une situation de choc multiple, le coefficient ρ_N caractérise plutôt la dissipation globale d'énergie. Il n'y a alors aucune raison pour que la vitesse

formelle soit nulle car sa valeur dépend de l'état des contacts de l'ensemble des particules du système, ce qui autorise l'ouverture du contact ($v_N^- = 0$ et $v_N^+ \neq 0$).

Les collisions multiples avec frottement se traitent dans le même esprit. Le graphe de Coulomb généralisé (figure 4-1b) relie la percussion tangentielle P_T à une vitesse tangentielle formelle \bar{v}_T , moyenne des vitesses avant et après un choc pondérée par un coefficient ρ_T . La percussion tangentielle P_T s'exprime :

$$\begin{cases} P_T = \frac{m}{3}(1 + \rho_T)(\bar{v}_T - v_T^-) & \text{dans le cas de disques} \\ P_T = \frac{m}{7}(1 + \rho_T)(\bar{v}_T - v_T^-) & \text{dans le cas de sphères} \end{cases} \quad [4.3]$$

En considérant le cas d'une collision binaire avec frottement, on s'aperçoit que le coefficient ρ_T s'identifie au coefficient de restitution tangentiel e_T . Les particules en contact avant le choc peuvent acquérir une vitesse tangentielle relative pour les mêmes raisons que précédemment. En outre, un contact initialement glissant peut se transformer en contact non glissant. Le statut des contacts peut donc être modifié. Ce formalisme permet de décrire aussi bien des collisions binaires que des contacts multiples.

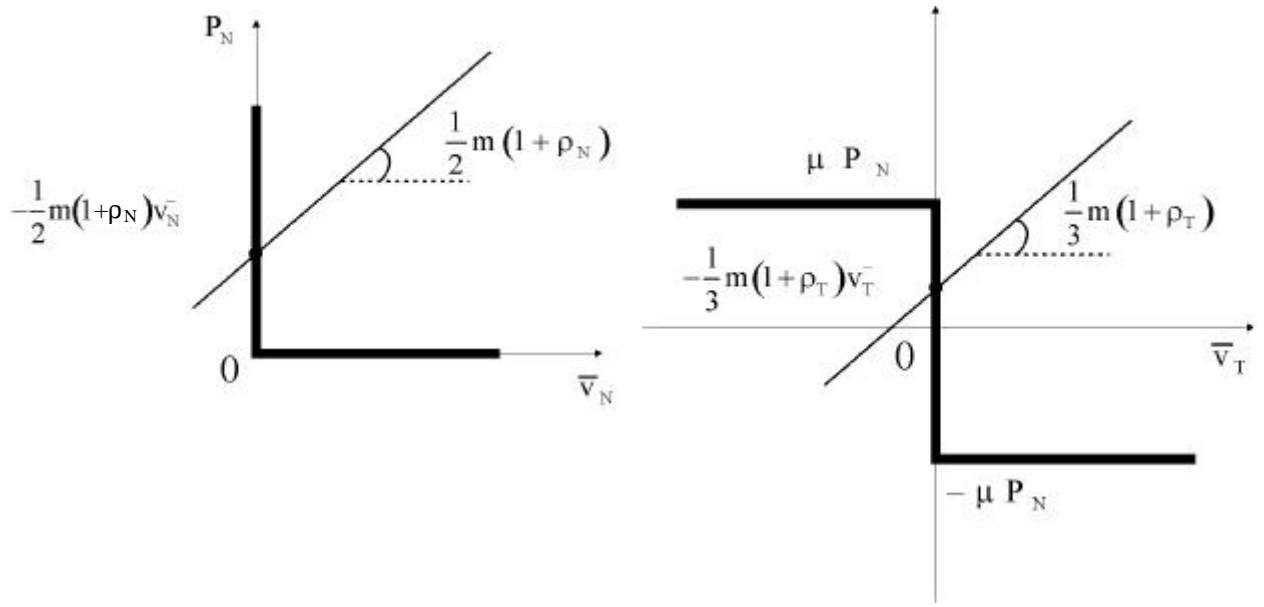


Figure 4-1 : Graphes de Signorini (a) et de Coulomb (b) généralisés (pour des disques de même diamètre).

II. Présentation rapide de l'algorithme

On utilise la méthode "saute-mouton" [Allen87] qui consiste à calculer les forces et les vitesses de manière décalée. Partant d'un instant initial t_n , où les positions \vec{r}_n et les vitesses \vec{v}_n des particules sont connues, les positions $\vec{r}_{n+1/2}$, au demi-pas de temps suivant $\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right)$ sont alors calculées : $\vec{r}_{n+1/2} = \vec{r}_n + \frac{\Delta t}{2} \vec{v}_n$. La vitesse $\vec{v}_{n+1/2}^- = \vec{v}_n$ est connue et on cherche à déterminer $\vec{v}_{n+1/2}^+ = \vec{v}_{n+1}$. Les particules qui ont pu se recouvrir partiellement pendant le demi-pas de temps sont repérées. Ces interpénétrations n'ont pas de signification physique comme en dynamique moléculaire, et sont d'autant plus faibles que le pas de temps est petit. Une fois les contacts repérés, les percussions et les vitesses des particules sont calculées suivant une procédure qui sera détaillée ci-dessous. Les positions \vec{r}_{n+1} au demi-pas de temps suivant $(t_{n+1} = t_n + \Delta t)$ sont alors calculées :

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{n+1} &= \vec{r}_{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \vec{v}_{n+1/2} \\
 &= \vec{r}_n + \Delta t \frac{\left(\vec{v}_{n+1/2}^- + \vec{v}_{n+1/2}^+ \right)}{2}
 \end{aligned}
 \quad [4.4]$$

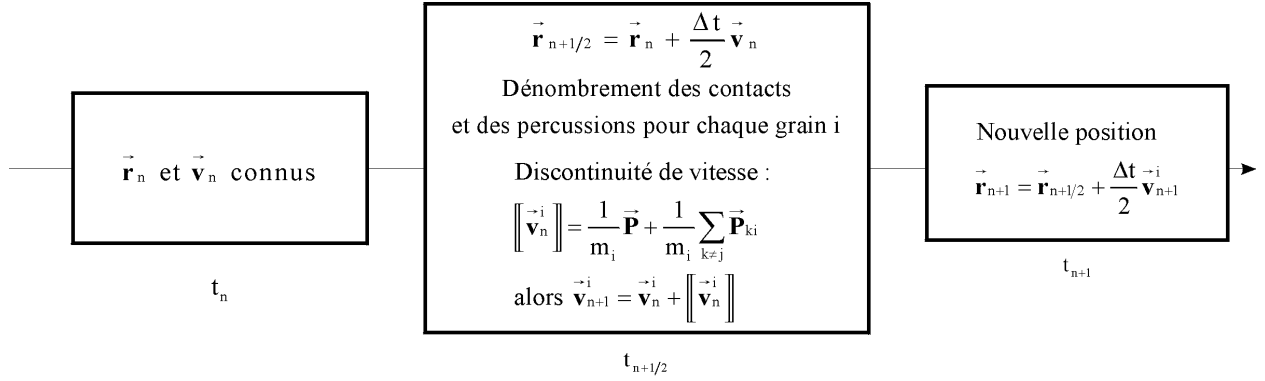


Figure 4-2 : Schéma de l'algorithme "saute-mouton".

Considérons deux grains i et j en contact au sein d'un réseau de contacts multiples (figure 4-3). Les grains i et j ont aussi des contacts avec d'autres grains (notés l pour i et k pour j). On note $m_{i,j}$ les masses, $I_{i,j}$ les moments d'inertie, $G_{i,j}$ les centres d'inertie, C_{kl} le point de contact entre les grains k et l et (\vec{n}, \vec{t}) le repère local au point de contact $C_{ij} = C$. Enfin, on note $\vec{P}_{kl} = \vec{P}_{k \rightarrow l}$ la percussion exercée par le grain k sur le grain l . On cherche à déterminer l'ensemble des percussions dans le réseau de contact, et l'on raisonne sur la percussion $\vec{P} = \vec{P}_{ji} = P_N \vec{n} + P_T \vec{t}$.

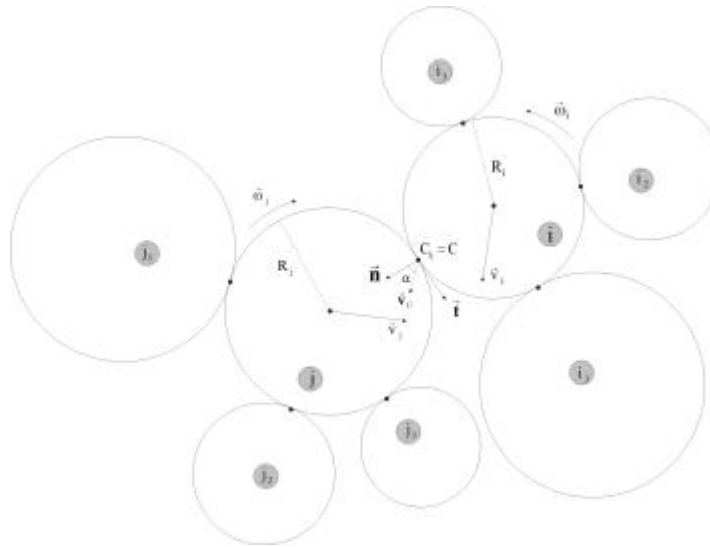


Figure 4-3 : Assemblée de grains

On définit les discontinuités de vitesse de translation et de rotation par :

$$\begin{cases} \llbracket \vec{v}_i \rrbracket = \vec{v}_i^+ - \vec{v}_i^- = \vec{v}_i(t_{n+1}) - \vec{v}_i(t_n) \\ \llbracket \vec{\omega}_i \rrbracket = \vec{\omega}_i^+ - \vec{\omega}_i^- = \vec{\omega}_i(t_{n+1}) - \vec{\omega}_i(t_n) \end{cases} \quad [4.5]$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\begin{cases} \llbracket \vec{v}_i \rrbracket = \frac{1}{m_i} \vec{P} + \underbrace{\frac{1}{m_i} \sum_{k \neq j} \vec{P}_{ki}}_{\vec{B}_i} \\ \llbracket \vec{v}_j \rrbracket = -\frac{1}{m_j} \vec{P} + \underbrace{\frac{1}{m_j} \sum_{l \neq i} \vec{P}_{lj}}_{\vec{B}_j} \end{cases} \quad [4.6]$$

ce qui définit les vecteurs \vec{B}_i et \vec{B}_j . L'équation de conservation du moment cinétique s'écrit :

$$\begin{cases} \llbracket \vec{\omega}_i \rrbracket = \frac{1}{I_i} \vec{G}_i \vec{C}_{ij} \wedge \vec{P} + \underbrace{\frac{1}{I_i} \sum_{k \neq j} \vec{G}_i \vec{C}_{ik} \wedge \vec{P}_{ki}}_{\vec{D}_i} \\ \llbracket \vec{\omega}_j \rrbracket = -\frac{1}{I_j} \vec{G}_j \vec{C}_{ij} \wedge \vec{P} + \underbrace{\frac{1}{I_j} \sum_{l \neq i} \vec{G}_j \vec{C}_{jl} \wedge \vec{P}_{lj}}_{\vec{D}_j} \end{cases} \quad [4.7]$$

ce qui définit les vecteurs \vec{D}_i et \vec{D}_j .

Pour établir une équation sur les percussions, nous introduisons la discontinuité de vitesse $\llbracket \vec{v}_C \rrbracket$ au point de contact C :

$$\begin{aligned} \llbracket \vec{v}_C \rrbracket &= \llbracket \vec{v}_i \rrbracket - \llbracket \vec{v}_j \rrbracket + \llbracket \vec{\omega}_i \rrbracket \wedge \vec{G}_i \vec{C} - \llbracket \vec{\omega}_j \rrbracket \wedge \vec{G}_j \vec{C} \\ &= \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} \right) \vec{P} + \vec{B}_i - \vec{B}_j + \left[\frac{1}{I_i} \vec{G}_i \vec{C} \wedge \vec{P} + \vec{D}_i \right] \wedge \vec{G}_i \vec{C} - \left[-\frac{1}{I_j} \vec{G}_j \vec{C} \wedge \vec{P} + \vec{D}_j \right] \wedge \vec{G}_j \vec{C} \end{aligned} \quad [4.8]$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 \llbracket \vec{v}_c \rrbracket &= \underbrace{\left\{ \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{\|\vec{G}_i \vec{C}\|^2}{I_i} + \frac{\|\vec{G}_j \vec{C}\|^2}{I_j} \right) \mathbf{I} - \left(\frac{\vec{G}_i \vec{C} \otimes \vec{G}_i \vec{C}}{I_i} + \frac{\vec{G}_j \vec{C} \otimes \vec{G}_j \vec{C}}{I_j} \right) \right\}}_{\underline{\underline{M}}^{-1}} \vec{P} \\
 &\quad + \underbrace{\vec{B}_i - \vec{B}_j + \vec{D}_i \wedge \vec{G}_i \vec{C} - \vec{D}_j \wedge \vec{G}_j \vec{C}}_{\vec{K}} \\
 &= \underline{\underline{M}}^{-1} \vec{P} + \vec{K}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dans la base (\vec{n}, \vec{t}) :

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{(\vec{G}_i \vec{C} \cdot \vec{t})^2}{I_i} + \frac{(\vec{G}_j \vec{C} \cdot \vec{t})^2}{I_j} & -\frac{(\vec{G}_i \vec{C} \cdot \vec{n})(\vec{G}_i \vec{C} \cdot \vec{t})}{I_i} - \frac{(\vec{G}_j \vec{C} \cdot \vec{n})(\vec{G}_j \vec{C} \cdot \vec{t})}{I_j} \\ -\frac{(\vec{G}_i \vec{C} \cdot \vec{n})(\vec{G}_i \vec{C} \cdot \vec{t})}{I_i} - \frac{(\vec{G}_j \vec{C} \cdot \vec{n})(\vec{G}_j \vec{C} \cdot \vec{t})}{I_j} & \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{(\vec{G}_i \vec{C} \cdot \vec{n})^2}{I_i} + \frac{(\vec{G}_j \vec{C} \cdot \vec{n})^2}{I_j} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

$\underline{\underline{M}}$ s'appelle la matrice de Delassus, matrice d'inertie au point de contact.

Le vecteur \vec{K} représente les contributions des autres contacts :

$$\vec{K} = \sum_{k \neq j} \left[\frac{1}{m_i} \vec{P}_{ki} + \frac{1}{I_i} \vec{G}_i \vec{C}_{ik} \wedge \vec{P}_{ki} \right] - \sum_{l \neq i} \left[\frac{1}{m_j} \vec{P}_{lj} + \frac{1}{I_j} \vec{G}_j \vec{C}_{jl} \wedge \vec{P}_{lj} \right] \tag{4.11}$$

Si on introduit les vitesses formelles relatives $\vec{\bar{v}}_c$ au point de contact, on obtient :

$$\llbracket \vec{v}_c \rrbracket = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\rho_N & 0 \\ 0 & 1+\rho_T \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{\xi}}} (\vec{\bar{v}}_c - \vec{v}_c^-) \tag{4.12}$$

ce qui définit une matrice $\underline{\underline{\xi}}$.

et

$$\vec{P} = \underline{\underline{M}} \left(\underline{\underline{g}} \left(\vec{v}_C - \vec{v}_C \right) - \vec{K} \right) \quad [4.13]$$

Dans le cas de grains circulaires, la matrice $\underline{\underline{M}}$ devient diagonale. Les parties normales et tangentielles sont alors découplées, ce qui représente une simplification majeure.

Dans le cas de deux grains circulaires de rayons R_i et R_j , l'inverse de la matrice de Delassus devient :

$$\underline{\underline{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j} + \frac{R_i^2}{I_i} + \frac{R_j^2}{I_j} \end{pmatrix} = \frac{1}{m^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+k^2}{k^2} \end{pmatrix} \quad [4.14]$$

où m^* est la masse effective $\frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$. On note :

$$M_{11} (= M_{NN}) = m^* \text{ et } M_{22} (= M_{TT}) = \frac{k^2}{(1+k^2)} m^* \quad [4.15]$$

Les équations de la dynamique s'écrivent alors :

$$\begin{cases} P_N = M_{NN} \left((1+\rho_N) (\vec{v}_{CN} - \vec{v}_{CN}^-) - K_N \right) \\ P_T = M_{TT} \left((1+\rho_T) (\vec{v}_{CT} - \vec{v}_{CT}^-) - K_T \right) \end{cases} \quad [4.16]$$

Il faut alors résoudre simultanément pour tous les contacts les équations de la dynamique (4-16) associées aux graphes généralisés de Signorini et de Coulomb.

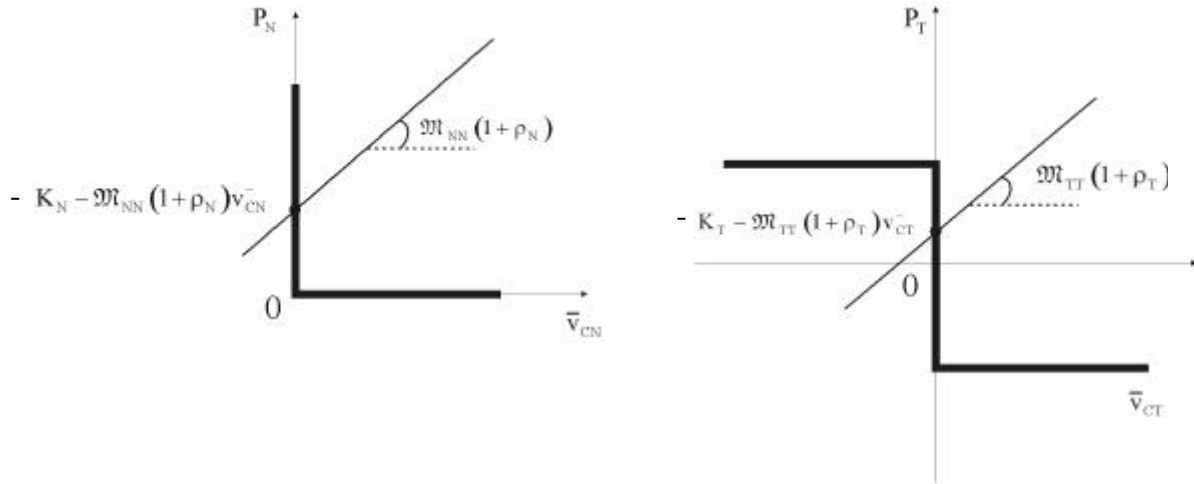


Figure 4-4 : Graphes de Signorini et de Coulomb généralisés.

Les conditions de Signorini et de Coulomb étant non-régulières (non-interpénétrabilité, discontinuité de la vitesse, non-régularité des forces) une résolution matricielle du problème n'est pas envisageable. La prise en compte des non-régularités fait appel aux techniques de l'analyse convexe [Moreau88b].

La solution est approchée par une méthode itérative. A un pas de temps donné, on connaît la valeur de la vitesse relative pour chaque contact \bar{v}_n^- . Lors la première itération (0), on attribue une certaine valeur aux impulsions P_N^0 et P_T^0 (nulle dans un cas dilué, ou celle du pas de temps précédent dans le cas dense). A une itération quelconque (n) la connaissance des impulsions P_N^n et P_T^n sur tous les contacts permet de calculer K_N et K_T . Les intersections des droites de la dynamique définies en (4-15) avec les graphes de Signorini et de Coulomb donnent à la fois une nouvelle estimation des impulsions P_N^{n+1} et P_T^{n+1} et des vitesses formelles $\bar{\bar{v}}_{n+1}$ (voir figure 4-4).

Cette procédure est complétée par une méthode de relaxation de type Gauss-Seidel :

$$\begin{cases} P_N^k = P_N^{k-1} - \omega \cdot M_{NN} \cdot \frac{\bar{v}_{CN}^{k-1}}{1 + \rho_N} \\ P_T^k = P_T^{k-1} - \omega \cdot M_{TT} \cdot \frac{\bar{v}_{CT}^{k-1}}{1 + \rho_T} \end{cases} \quad [4.17]$$

ω étant un paramètre de relaxation dont la valeur est comprise entre 1 et 2 suivant le problème considéré.

Lorsque le contact est multiple, tous les contacts sont examinés successivement dans un ordre quelconque. A chaque fois, les valeurs des contributions K_N et K_T sont actualisées ce qui a pour effet de translater la droite de la dynamique. Quand tous les contacts ont été passés en revue, le premier contact est de nouveau examiné. L'itération s'arrête lorsqu'un critère de convergence est vérifié. La pente des droites étant positive, la solution trouvée est unique.

Lorsque l'intersection se produit avec les branches horizontales des graphes, les vitesses formelles sont non nulles. Cette situation correspond à une ouverture des contacts sous l'effet de la propagation instantanée des impulsions à travers le réseau des contacts. D'un point de vue tangentiel, il y a changement de statut des contacts, c'est à dire que l'on passe d'un contact non-glissant à un contact glissant.

Lorsque plusieurs collisions surviennent en un pas de temps, l'ordre dans lequel l'algorithme les traite ne correspond pas à celui de la réalité physique. Cette approximation n'est cependant pas déraisonnable, car le réseau des contacts dans un écoulement granulaire est en constante évolution.

III. Cas des polygones

Si les grains sont anguleux, on doit distinguer plusieurs types de contact: pointe-face, face-face et pointe-pointe. Ce dernier type de contact est rare et on le négligera.

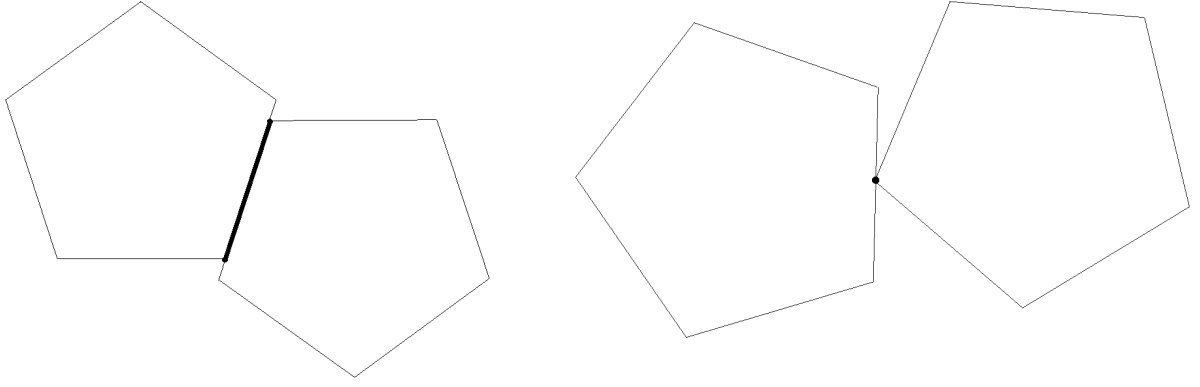


Figure 4-5 : Contacts face-face et face-pointe.

Contrairement aux disques et sphères, la matrice de Delassus n'est plus diagonale. Elle prend en compte le couplage existant entre les parties normales et tangentielles, ce qui rend la recherche des solutions plus compliquée. Nous n'indiquons ici que la façon dont l'équation de la dynamique (4-15) est modifiée compte-tenu de ce couplage, et pour plus de détail, nous renvoyons à [Albertelli99]. On doit donc distinguer trois statuts de contact :

1. Soit il y a contact : $P_N > 0$, donc $\bar{v}_{CN} = 0$, alors :

A. Si $|P_T| > \mu P_N$, le contact est glissant (frottement complètement mobilisé). On impose :

$$\begin{cases} P_T = \pm \mu P_N \text{ et } \bar{v}_{CT} \neq 0 \\ P_N = \frac{1}{(M^{-1})_{11} \pm \mu (M^{-1})_{12}} \left(-(1 + \rho_N) \bar{v}_{CN} - K_N \right) \end{cases} \quad [4.18]$$

B. Soit $|P_T| < \mu P_N$, le contact est non-glissant. Alors $\bar{v}_{CT} = 0$ et :

$$\begin{cases} P_N = \left(\underline{\underline{M}} \left(-\underline{\underline{\varepsilon}} \bar{v}_C - \bar{K} \right) \right) \cdot \vec{n} \\ P_T = \left(\underline{\underline{M}} \left(-\underline{\underline{\varepsilon}} \bar{v}_C - \bar{K} \right) \right) \cdot \vec{t} \end{cases} \quad [4.19]$$

2. Soit il n'y a pas contact : $P_N = 0$ et donc $P_T = 0$ aussi.

Le schéma de résolution itératif reste le même.

IV. Conclusion

En plus des avantages décrits précédemment par rapport aux autres techniques de simulations, la méthode de dynamique des contacts est performante d'un point de vue numérique. Le pas de temps est en effet supérieur à celui utilisé par les méthodes de dynamique moléculaire car plusieurs contacts peuvent être traités simultanément et il ne dépend pas du temps entre les collisions comme dans les méthodes collisionnelles. La détermination des percussions nécessite néanmoins un processus d'itération interne.

Cependant, la convergence est rapide, de l'ordre de 3000 itérations pour un milieu dense. Ce qui nous amène à des temps de calcul typiques de l'ordre de une seconde CPU par pas de temps pour simuler une assemblée de 1000 particules dissipatives sur un PC de bureau cadencé à 400 MHz.

ANNEXE 5

TECHNIQUES DE PRISE DE MOYENNE

ANNEXE 5

TECHNIQUES DE PRISE DE MOYENNE

On ne discute pas ici de la validité de la prise de moyenne (voir Chap I § IV.B), mais on décrit plutôt les procédures statistiques qui permettent de calculer des grandeurs moyennes (compacité et vitesse moyenne, tenseur des contraintes) à partir des grandeurs locales (positions, vitesses, "moment interne"). Cette annexe est donc complémentaire de l'Annexe 6 qui explique comment on construit une grandeur macroscopique comme le tenseur des contraintes à partir de grandeurs microscopiques que sont les forces de contact. Sur cette question, on pourra consulter [Zhang97, Luding01].

On considère que notre système est dans un état stationnaire, et, compte-tenu des conditions aux limites périodiques, qu'il est homogène selon la direction x de l'écoulement. On va donc réaliser des moyennes spatiales selon la direction x . Par ailleurs, dans le cadre d'une hypothèse d'ergodicité, on complète par une moyenne dans le temps, en considérant une série de 100 états du système échelonnés tous les 100 pas de temps. En revanche, aucune moyenne n'est effectuée selon la direction y perpendiculaire à l'écoulement. Ce sont précisément ces dépendances selon la hauteur de l'écoulement que l'on veut mesurer.

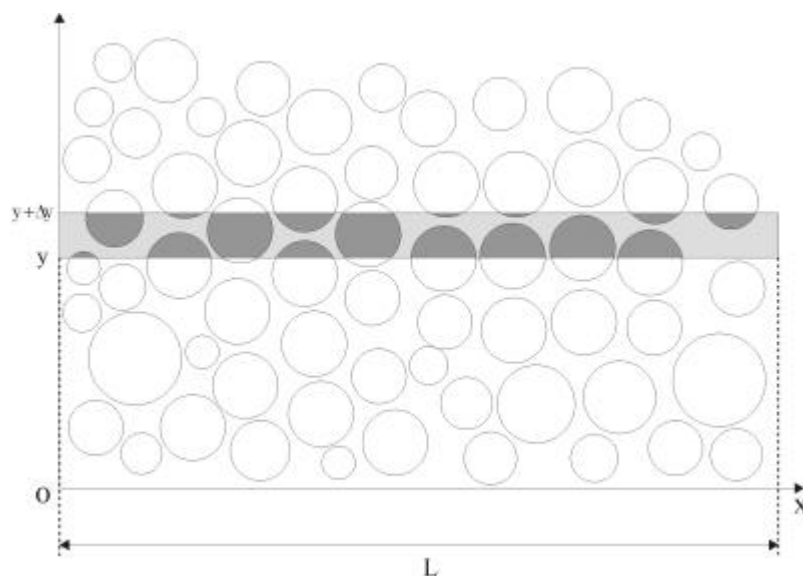


Figure 5-1 : Calcul des grandeurs moyennes dans des bandes horizontales d'épaisseur Dy .

I. Moyennes pondérées

Soit un ensemble de grains $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ de diamètre d_i appartenant à une cellule périodique bidimensionnelle de longueur L , dont les centres de masses \vec{r}_i et les vitesses de translation \vec{v}_i sont exprimés dans le repère (Oxy) lié au plan incliné (figure 5-1). Les écoulements étant uniformes dans la direction x , on découpe la cellule en bandes longitudinales de longueur L et de hauteur Δy . A chacun de ces grains sont associées des grandeurs scalaires, vectorielles ou bien tensorielles G_i (position \vec{r}_i , vitesse \vec{v}_i , rotation ω_i , texture $\underline{\chi}_i$...) dont on va construire la valeur moyenne $\langle G \rangle_{[y, y+\Delta y]}$ sur chaque tranche de hauteur Δy . Les valeurs moyennes sont définies par la quantité :

$$\langle G \rangle_{[y, y+\Delta y]} = \frac{\sum_{i=1}^N G_i F_i(y, y+\Delta y)}{\sum_{i=1}^N F_i(y, y+\Delta y)} \quad [5.1]$$

où F_i est une fonction de pondération.

Le choix le plus simple correspond à compter le nombre $N_{[y, y+\Delta y]}$ de grains dont le centre de masse appartient à la bande d'épaisseur Δy :

$$\begin{cases} F_i(y, y+\Delta y) = 1 \text{ si } y_i \in [y, y+\Delta y[\\ F_i(y, y+\Delta y) = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad [5.2]$$

Dans ce cas :

$$\langle G \rangle_{[y, y+\Delta y]} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_i \quad [5.3]$$

Si on souhaite avoir une meilleure précision, on choisit pour F_i la surface de grain interceptée par la bande. Définissons tout d'abord λ_i la longueur de la corde d'un cercle centré en y_i de diamètre d_i à la cote t (voir figure 5-2) :

$$\begin{cases} \lambda_i(t) = 2\sqrt{\frac{d_i^2}{4} - (t - y_i)^2} \text{ de sorte que } \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_i(t) dt = \pi \frac{d_i^2}{4} = S_i \\ \text{et } \lambda_i(t) = 0 \text{ si } |t - y_i| \geq r_i \end{cases} \quad [5.4]$$

où S_i désigne la surface du grain i .

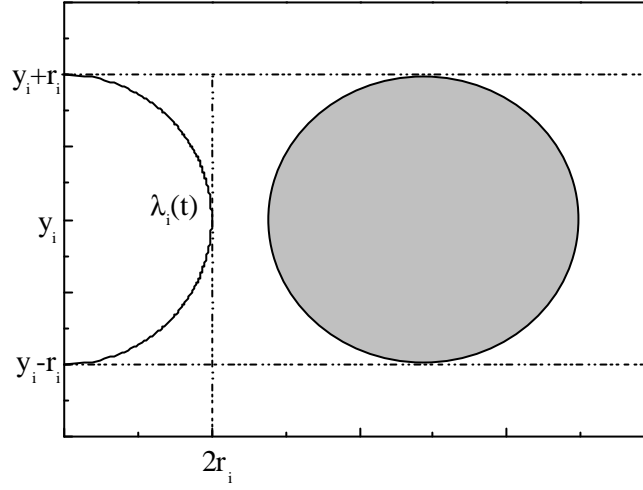


Figure 5-2 : "Longueur d'une corde."

On a alors :

$$\begin{aligned}
 F_i(y, y + \Delta y) &= \int_y^{y+\Delta y} \lambda_i(t) dt \\
 &= (y + \Delta y) \sqrt{\frac{d_i^2}{4} - (y + \Delta y - y_i)^2} + \frac{d_i^2}{4} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2(y + \Delta y - y_i)}{d_i}\right) \\
 &\quad - y \sqrt{\frac{d_i^2}{4} - (y - y_i)^2} - \frac{d_i^2}{4} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{2(y - y_i)}{d_i}\right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dans la limite où $\Delta y \rightarrow 0$ (bande d'épaisseur infiniment fine) :

$$F_i(y, y + \Delta y) \approx \lambda_i(y) \Delta y \tag{5.6}$$

En conséquence :

$$\langle G \rangle(y) = \frac{\sum_{i=1}^N G_i \lambda_i(y)}{\sum_{i=1}^N \lambda_i(y)} \tag{5.7}$$

Cependant, le dénominateur fait apparaître la compacité moyenne linéique :

$$\langle v \rangle(y) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \lambda_i(y) \quad [5.8]$$

Les autres grandeurs moyennes linéiques deviennent :

$$\langle G \rangle(y) = \frac{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^N G_i \lambda_i(y)}{\langle v \rangle(y)} \quad [5.9]$$

La valeur moyenne de G sur une bande $[y_1, y_2]$ doit être pondérée par cette compacité linéique :

$$\langle G \rangle_{[y_1, y_2]} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} \langle G \rangle(y) \cdot \langle v \rangle(y) dy}{\int_{y_1}^{y_2} \langle v \rangle(y) dy} \quad [5.10]$$

$$\text{et si } \langle v \rangle = \text{Cste, alors } \langle G \rangle_{[y_1, y_2]} = \frac{1}{y_2 - y_1} \int_{y_1}^{y_2} \langle G \rangle(y) dy$$

On en déduit également l'expression des écarts-types des grandeurs moyennes :

$$\begin{aligned} \langle \Delta G^2 \rangle(y) &= \frac{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^N (G_i - \langle G \rangle(y))^2 \lambda_i(y)}{\langle v \rangle(y)} \\ &= \langle G^2 \rangle(y) - \langle G \rangle^2(y) \end{aligned} \quad [5.11]$$

On aura ainsi pour la vitesse moyenne :

$$\langle \bar{v} \rangle(y) = \frac{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \bar{v}_i \lambda_i(y)}{\langle v \rangle(y)} \quad [5.12]$$

et pour la "température granulaire" :

$$\begin{aligned} \langle T^{xx} \rangle(y) &= \frac{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^N (v_i^x - \langle v^x \rangle(y))^2 \lambda_i(y)}{\langle v \rangle(y)} \\ &= \langle (v^x)^2 \rangle(y) - \langle v^x \rangle^2(y) \end{aligned} \quad [5.13]$$

et de même pour T^{yy} . Enfin :

$$\langle T \rangle(y) = \frac{1}{2} [\langle T^{xx} \rangle(y) + \langle T^{yy} \rangle(y)] \quad [5.14]$$

II. Application au tenseur des contraintes

Suivant les travaux de [Moreau97], le tenseur des contraintes dans un milieu granulaire peut s'exprimer comme une moyenne des "moments internes" des grains (voir Annexe 6). Ainsi, le tenseur des contraintes dans une surface S englobant N grains vaut :

$$\underline{\underline{\Sigma}}(S) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{M}}_i = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\sigma}}_i \cdot S_i \text{ avec } \underline{\underline{M}}_i = S_i \cdot \underline{\underline{\sigma}}_i \quad [5.15]$$

où le "moment interne" vaut :

$$\underline{\underline{M}}_i = \text{Sym} \left(\sum_{c=1}^{N_i} \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c \right) + \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \omega_i^2 \underline{\underline{\text{Id}}} \quad [5.16]$$

Compte-tenu de ce qui précède, on propose l'expression suivante pour la moyenne linéique du tenseur des contraintes :

$$\langle \underline{\underline{\Sigma}} \rangle(y) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\sigma}}_i \cdot \lambda_i(y) \quad [5.17]$$

Par ailleurs, le tenseur de Reynolds (partie "fluctuante") se déduit de la température T par :

$$\langle \underline{\underline{\Sigma}}^f \rangle(y) = \rho_p \langle v \rangle(y) \langle \underline{\underline{T}} \rangle(y) \quad [5.18]$$

III. Statistiques sur le réseau de contact

On suppose connue la distribution des orientations de contact $\rho(\varphi)$, telle que :

$$\int_0^{2\pi} \rho(\varphi) d\varphi = 1 \quad [5.19]$$

Si l'on considère une grandeur X quelconque associée au contact ($N, T, T/N, \dots$), la moyenne angulaire de cette grandeur doit être calculée selon :

$$\int_0^{2\pi} X(\varphi) \rho(\varphi) d\varphi = \langle X \rangle \quad [5.20]$$

où $X(\varphi)$ est la moyenne des réalisations de X sur la plage $d\varphi$.

On peut plus précisément s'intéresser à la distribution de X dans cette plage $d\varphi$, soit $\rho(X, \varphi)$, telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \rho(X, \varphi) dX = 1 \\ \int X \rho(X, \varphi) dX = X(\varphi) \end{array} \right. \quad [5.21]$$

On peut donc écrire :

$$\int \int_0^{2\pi} X \rho(X, \varphi) \rho(\varphi) dX d\varphi = \langle X \rangle \quad [5.22]$$

On peut aussi s'intéresser à la distribution de X , indépendamment de l'orientation, ce qui conduit à considérer $\rho(X)$:

$$\rho(X) = \int_0^{2\pi} \rho(X, \varphi) \rho(\varphi) d\varphi \quad [5.23]$$

telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \rho(X) dX = 1 \\ \int X \rho(X) dX = \langle X \rangle \end{array} \right. \quad [5.24]$$

ANNEXE 6

TENSEUR DE TEXTURE

TENSEUR DES CONTRAINTES

ANNEXE 6

TENSEUR DE TEXTURE

TENSEUR DES CONTRAINTES

Comme le montre la figure 6-1, le réseau des contacts joue un rôle majeur dans les écoulements granulaires denses. Il est important de le caractériser tant du point de vue géométrique (densité et orientation des contacts), que du point de vue des forces de contact (intensité et orientation). Deux grandeurs tensorielles sont naturellement introduites pour caractériser la géométrie et les efforts : le tenseur de texture et le tenseur des contraintes.

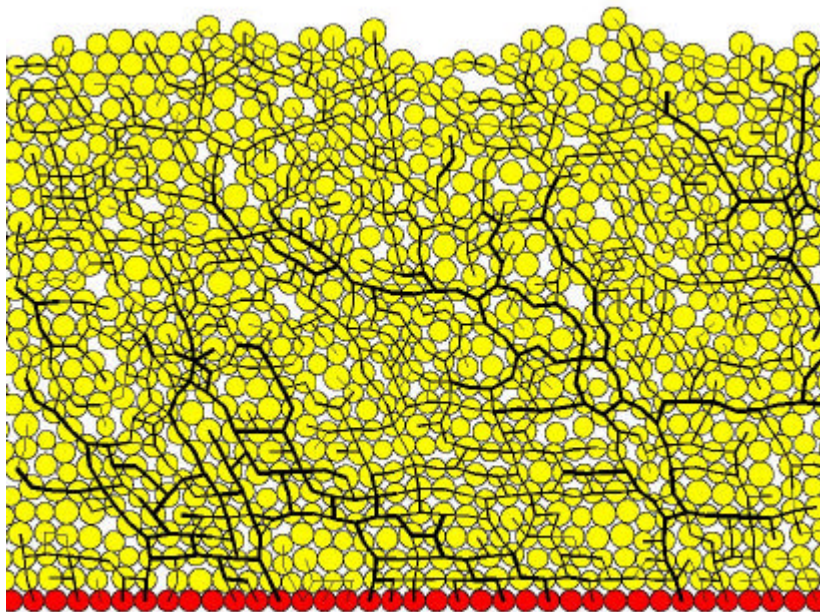


Figure 6 - 1: Réseau de contact.

I. Tenseur de texture

Considérons un grain i soumis à un instant donné à plusieurs forces de contact (voir figure 6-2). En chacun des points de contact c , on définit \underline{n}^c le vecteur normal au point de contact. On peut alors définir le tenseur de texture (ou encore de "fabrique") du grain i par :

$$\underline{\underline{\pi}}^i = \sum_c \underline{n}^c \otimes \underline{n}^c \quad [6.1]$$

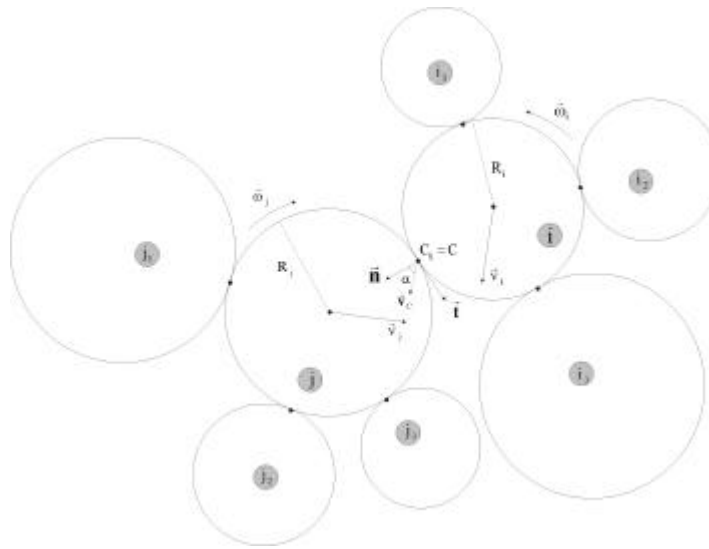


Figure 6 - 2 : Schéma montrant quelques grains en contact.

Le tenseur de texture d'une assemblée de grains est alors défini par [Onoda90, Radjaï 01a, Lätzel00]:

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{\pi}}^i \quad [6.2]$$

Il renseigne sur la distribution des orientations de contact. Le tenseur de texture est symétrique par définition, et est ainsi décrit par trois quantités scalaires indépendantes (en deux dimensions). La diagonalisation du tenseur fournit en effet les directions des deux états

propres φ_{\min} et φ_{\max} , ainsi que les valeurs propres associées π_{\min} et π_{\max} . La trace π_t , égale à $\pi_{\min} + \pi_{\max}$, est reliée à la coordonnée z par la relation suivante :

$$\pi_t = \langle v \rangle \cdot z \quad [6.3]$$

où $\langle v \rangle$ est la compacité moyenne. Le déviateur $\pi_d = \pi_{\max} - \pi_{\min}$ rend compte de l'anisotropie du réseau de contact au premier ordre. Les directions φ_{\min} et φ_{\max} (axes majeur et mineur) correspondent aux directions le long desquelles les grains ont, en moyenne, le plus grand ou le plus petit nombre de contacts. La fonction de distribution des orientations de contacts peut donc être approximée par:

$$\rho(\varphi) \approx \pi_t + \pi_d \cos 2(\varphi - \varphi_{\max}) \quad [6.4]$$

II. Tenseur des contraintes

Dans le cas des assemblées de grains en équilibre statique, on trouve dans la littérature plusieurs expressions, plus ou moins équivalentes, du tenseur des contraintes en fonction des forces de contact entre les grains [Love27, Weber66, Drescher72, Christoffersen81, Krut96, Bourada99]. Ainsi, pour une assemblée de grains occupant un volume V , interagissant par des forces de contact \vec{f}_c aux points \vec{x}_c , le tenseur des contraintes (c pour "contact") s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^c = \frac{1}{V} \sum_c \vec{x}_c \otimes \vec{f}_c \quad [6.5]$$

Nous voulons ici examiner la situation d'un écoulement dans lequel les grains, animés de vitesse de translation et de rotation, transportent de la quantité de mouvement, et par ailleurs interagissent par contact maintenu ou collisions. Dans le cas très dilué, on dispose du tenseur des contraintes de Reynolds qui décrit le transport de quantité de mouvement associé aux mouvements fluctuants. Ainsi pour une assemblée de N grains (masse m_i , vitesses fluctuantes $\delta\vec{v}_i$), occupant un volume V , le tenseur des contraintes (f pour "fluctuant") s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^f = \frac{1}{V} \sum_i m_i \delta\vec{v}_i \otimes \delta\vec{v}_i \quad [6.6]$$

Dans le cas d'un écoulement modérément dilué, où les grains interagissent par collisions binaires, on dispose des résultats de la théorie cinétique, qui exprime le tenseur des contraintes à partir des transferts de quantité de mouvement dans les collisions (voir chapitre V), de sorte que, par exemple :

$$\begin{cases} \Sigma_{xx} = f_{xx}(v)T \\ \Sigma_{xy} = f_{xy}(v)\sqrt{T}\dot{\gamma} \end{cases} \quad [6.7]$$

où $f_{\alpha\beta}$ sont des fonctions de la compacité v , T est la température et $\dot{\gamma}$ le taux de cisaillement.

Dans le cas d'un écoulement plus dense, on a des situations de contact multiple, où se mêlent contacts maintenus et collisions, de sorte que l'on doit dépasser l'expression fournie par la théorie cinétique. Il faut trouver une expression plus générale, compatible avec la limite de la statique des empilements et avec la limite des écoulements dilués, collisionnel.

On reprend le résultat de [Batchelor70] qui, partant de la définition primitive de la contrainte en mécanique, c'est à dire la résultante des forces exercées sur une surface élémentaire et le flux de la quantité de mouvement à travers cette surface, aboutit à la décomposition du tenseur des contraintes moyennes macroscopique, au sein d'un volume V , entre un terme associé aux efforts intérieurs, et un terme associé aux fluctuations du mouvement (le tenseur de Reynolds), défini ci-dessus :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{V} \int_V (\underline{\underline{\sigma}} + \rho(\vec{r}) \delta \vec{v} \otimes \delta \vec{v}) d\vec{r} \quad [6.8]$$

Dans cette expression $\underline{\underline{\sigma}}$ représente le tenseur local des contraintes, dont la définition sera donnée précisément dans les paragraphes suivants. Cette définition n'est pas unique, mais elle reste la définition la plus simple qui soit compatible avec les concepts de la mécanique des milieux continus et que l'on puisse étendre aux écoulements granulaires en régime permanent. Notons que l'analyse de Batchelor a souvent été utilisée dans la modélisation d'écoulement de suspensions concentrées.

Pour décrire les efforts intérieurs dans un milieu granulaire, on peut considérer chacun des grains comme un milieu continu, mais on peut aussi ne décrire que les efforts de contact entre les grains. Cette deuxième approche est naturelle si l'on considère les grains comme des corps rigides.

L'analyse qui suit reprend le travail mené par [Moreau97]. Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, n'importe quel effort subi par un système matériel peut-être défini par la puissance qui serait développée par cet effort si les éléments du système étaient soumis à un champ de vitesse virtuelle. C'est dans cet esprit que Moreau, en écrivant le principe des puissances virtuelles, a introduit la notion de moment interne associé à chaque grain. Nous raisonnons dans un système à deux dimensions.

II.A. Moment interne d'un grain

Considérons un grain i homogène (de masse volumique ρ_p) de centre de gravité \vec{r}_i , occupant une surface S_i , et soumis à des forces de contact \vec{f}_c de la part de ses voisins ($c = 1$ à N_i). Le mouvement réel du grain, considéré comme un solide rigide, est décrit par :

$$\vec{v}_i(\vec{r}) = \vec{v}_i + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad [6.9]$$

où \vec{v}_i est la vitesse de son centre de gravité et $\vec{\omega}_i$ la vitesse de rotation. Son accélération s'écrit donc :

$$\vec{\gamma}_i(\vec{r}) = \vec{\gamma}_i + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad [6.10]$$

On lui associe un champ de vitesse virtuel rigidifiant défini par :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}_i) + \underline{\underline{\omega}} \cdot \vec{r} \quad [6.11]$$

où $\underline{\underline{\omega}}$ est le tenseur du second ordre antisymétrique associé au vecteur rotation virtuel $\vec{\omega}$ du système.

On applique alors le principe des puissances virtuelles : pour tout champ de vitesse virtuelle :

$$P_{\text{Int}}(\vec{v}) + P_{\text{Ext}}(\vec{v}) = P_{\text{Acc}}(\vec{v}) \quad [6.12]$$

avec

$$\begin{cases} P_{\text{Acc}}(\vec{v}) = \int_{S_i} \rho_p \vec{\gamma}_i(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} \\ P_{\text{Ext}}(\vec{v}) = \sum_{c=1}^{N_i} \vec{f}^c \cdot \vec{v}(\vec{r}^c) + \int_{S_i} \rho_p \vec{g} \cdot \vec{v}(\vec{r}) d\vec{r} \end{cases} \quad [6.13]$$

$P_{\text{Int}}(\vec{v})$ étant une forme linéaire du champ de vitesse virtuelle, il existe \vec{R} et $\underline{\underline{M}}$ tel que :

$$P_{\text{Int}}(\vec{v}) = \vec{R} \cdot \vec{v}(\vec{r}_i) + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\omega}} \quad [6.14]$$

Cependant, pour un mouvement rigidifiant, la puissance des efforts intérieures est nulle. Ceci implique que $\vec{R} = 0$ et que le tenseur $\underline{\underline{M}}$ est symétrique dans une base orthonormée. Ce tenseur est appelé moment interne du grain i . On le notera $\underline{\underline{M}}_i$.

Si on considère le grain comme un milieu continu, on peut lui associer un tenseur de contrainte de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$, de sorte que pour tout champ de vitesse virtuelle :

$$P_{\text{Int}}(\vec{v}) = - \int_{S_i} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\text{grad}}}(\vec{v}) d\vec{r} \quad [6.15]$$

En prenant le même champ de vecteur vitesse affine défini précédemment, on obtient :

$$\underline{\underline{M}}_i = \int_{S_i} \underline{\underline{\sigma}}(\vec{r}) d\vec{r} \quad [6.16]$$

C'est-à-dire que l'on peut définir un tenseur des contraintes moyen dans le grain par :

$$\underline{\underline{\sigma}}_i = \frac{1}{S_i} \underline{\underline{M}}_i \quad [6.17]$$

Le principe des puissances virtuelles donne alors une partie statique et une partie dynamique pour le tenseur de moment interne (avec l'accélération réelle) :

$$\underline{\underline{M}}_i = \sum_{c=1}^{N_c} \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c - \int_{S_i} \rho_p \vec{\gamma}_i(\vec{r}) \otimes \vec{r} d\vec{r} \quad [6.18]$$

Le terme dynamique s'écrit sous la forme :

$$\int_{S_i} \vec{\gamma}_i(\vec{r}) \otimes \vec{r} \, d\vec{r} = \int_{S_i} \vec{\gamma}_i \otimes \vec{r} \, d\vec{r} + \int_{S_i} (\dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{r}) \otimes \vec{r} \, d\vec{r} + \int_{S_i} (\vec{\omega}_i \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{r})) \otimes \vec{r} \, d\vec{r} \quad [6.19]$$

Le premier terme est nul pour un grain à symétrie de révolution.

A deux dimensions, le vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}_i$ est normal au plan et :

$$\dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{r} = \dot{\omega}_i \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot \vec{r} \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [6.20]$$

de sorte que le deuxième terme :

$$\int_{S_i} (\dot{\vec{\omega}}_i \wedge \vec{r}) \otimes \vec{r} \, d\vec{r} = \dot{\omega}_i \underline{\underline{\varepsilon}} : \int_{S_i} \vec{r} \otimes \vec{r} \, d\vec{r} \quad [6.21]$$

est un tenseur antisymétrique. Par ailleurs,

$$\int_{S_i} (\vec{\omega}_i \wedge (\vec{\omega}_i \wedge \vec{r})) \otimes \vec{r} \, d\vec{r} = -\omega_i^2 \int_{S_i} \vec{r} \otimes \vec{r} \, d\vec{r} \quad [6.22]$$

Or

$$\int_{S_i} \rho(\vec{r}) \, \vec{r} \otimes \vec{r} \, d\vec{r} = \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \underline{\underline{\text{Id}}} \quad [6.23]$$

Au total, le moment interne étant symétrique, on obtient en symétrisant l'expression initiale :

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \text{Sym} \left(\sum_{c=1}^{N^i} \vec{f}^c \otimes \vec{r}^c \right) + \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \omega_i^2 \underline{\underline{\text{Id}}} \quad [6.24]$$

II.B. Cas d'une assemblée de N grains

Dans le cas où le système Σ est composé d'une assemblée de N sous-systèmes Σ_i (grains i) qui interagissent entre eux uniquement au travers de contacts, pour lesquels on a le principe de l'action et de la réaction (on néglige tout type d'interaction mutuelle à distance), le moment interne de Σ est égal à la somme des moments internes des sous-systèmes :

$$\underline{\underline{M}}(\Sigma) = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{M}}(\Sigma_i) \quad [6.25]$$

Le tenseur des contraintes moyen dans une surface S contenant N grains est alors la moyenne surfacique des moments internes individuels :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \underline{\underline{M}}_i = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N S_i \cdot \underline{\underline{\sigma}}_i \quad [6.26]$$

III. Conclusion

Le tenseur des contraintes est la somme de trois contributions :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}}^c + \underline{\underline{\Sigma}}^f + \underline{\underline{\Sigma}}^r \quad [6.27]$$

Le premier terme ("contact") est le terme usuel en statique, associé aux efforts de contact entre grains. Le deuxième terme ("fluctuations") est le tenseur de Reynolds usuel en mécanique des fluides, associé aux fluctuations de vitesse des grains. Le troisième terme ("rotation") est nouveau. Il est lié à la rotation propre des grains :

$$\underline{\underline{\Sigma}}^c = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \sum_{c=1}^{N_i} \text{Sym}(\vec{f}^c \otimes \vec{r}^c) \quad [6.28]$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^f = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N m_i \delta \vec{v}_i \otimes \delta \vec{v}_i \quad [6.29]$$

$$\underline{\underline{\Sigma}}^r = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \underline{\underline{\text{Id}}} \quad [6.30]$$

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

[Abu-Zaid90]

S. Abu-Zaid et Goodarz Ahmadi.
Simple kinetic model for rapid granular
flows including frictional losses
J. of Eng. Mech., 116, 379-389 (1990)

[Aharonov99]

E. Aharonov et D. Sparks
On phase transition and self-organized
critical state in granular packings
Phys. Rev. E, 60, 6890 (1999).

[Aharonov02]

E. Aharonov
Shear profiles and localization in
simulations of granular materials
Phys. Rev. E, 65, 051302(2002).

[Ahn91]

H. Ahn, C. E. Brennen et R. H. Sabersky
Measurements of velocity, velocity
fluctuation, density, and stresses in chute
flows of granular materials
J. Appl. Mech., 58, 792-803 (1991).

[Albertelli99]

M. Albertelli
*Simulation numérique d'écoulements
granulaires sur un plan incliné*
Stage de fin d'étude de l'Institut Galilée,
Université de Villetaneuse (1999).

[Allen87]

M. P. Allen et D. J. Tildesley
Computer simulation of liquids
Oxford University Press (1987).

[Allersma87]

*Optical analysis of stress and strain in
photoelastic particle assemblies.*
Thèse de doctorat, Université de Delft,
(1987).

[Ancey96]

C. Ancey, P. Coussot et P. Evesque

Examination of the possibility of a fluid-
mechanics treatment of dense granular
flows

*Mechanics of Cohesive and Frictional
Materials*, 1, 385-403 (1996).

[Ancey01]

C. Ancey
Dry granular flows down an inclined
channel : experimental investigation on the
frictional-collisional regime
Phys. Rev. E, 65, 011304 (2001).

[Anderson92]

K. G. Anderson et R. Jackson
A comparison of the solutions of some
proposed equations of motion of granular
materials for fully developed flow down
inclines
J. Fluid Mech., 241, 145-168 (1992).

[Andreotti01a]

B. Andreotti et S. Douady
Selection of velocity profile and flow
depth in granular flow
Phys. Rev. E, 63, 031305 (2001).

[Andreotti01b]

B. Andreotti, A. Daerr et S. Douady
On scaling laws in granular flows down a
rough plane
Phys. Fluid., 14, 415-418 (2001).

[Aranson01a]

I. S. Aranson et L. S. Tsimring
Continuum description of avalanches in
granular media
Phys. Rev. E, 64, 020301 (2001).

[Aranson01b]

I. S. Aranson et L. S. Tsimring
Continuum theory of partially fluidized
granular flows
preprint.

[Augenstein78]

D. A. Augenstein et R. Hogg
An experimental study of the flow of dry
powders over inclined surfaces
Powder Tech., 19, 205-215 (1978).

[Azanza98]

E. Azanza
*Ecoulements granulaires bidimensionnels
sur un plan incliné*
Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et
Chaussées, Paris (1998).

[Azanza99]

E. Azanza, F. Chevoir, P. Moucheron.
Experimental study of granular flows down
an inclined plane.
J. Fluid Mech., 400, 199-227 (1999)

[Babic90]

M. Babic, H. H. Shen et H. T. Shen
The stress tensor in granular shear flows of
uniform, deformable discs at high solid
concentrations
J. Fluid Mech., 219, 81-118 (1990).

[Bagnold54]

Experiment in a gravity free dispersion of
large solid sphere in a newtonian fluid
under shear.
Proc. Roy. Acad. London A, 225, 49-63
(1954)

[Batchelor70]

G. K. Batchelor
The stress system in a suspension of force-
free particles
J. Fluid Mech., 41, 545-570 (1970).

[Baxter89]

G. W. Baxter, R. P. Behringer, T. Fagert et
G. A. Johnson
Pattern formation in flowing sand
Phys. Rev. Lett., 62, 2825-2828 (1989).

[Bennis01]

M. Bennis et V. Berterottière
Avalanches granulaires sur un plan incliné
Stage scientifique, Ecole Nationale des
Ponts et Chaussées (2001).

[Bernu90]

B. Bernu et R. Mazighi
One dimensional bounce of inelastically
colliding marbles on a wall
J. Phys. A, 23, 5745 (1990).

[Bertho02]

Y. Bertho, F. Giorgiutti, T. Raafat, E.J.
Hinch, H.J. Herrmann et J.-P. Hulin.
Powder flow down a vertical pipe - the
effect of air flow.
J. Fluid Mech., 459, 317-345 (2002).

[Bocquet98]

L. Bocquet, E. Charlaix, S. Ciliberto et
Crassous
Moisture-induced ageing in granular media
and the kinetics of capillary condensation
Nature, 396, 735 (1998).

[Bocquet01]

L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T. C.
Lubensky et J. P. Gollub
Granular shear flow dynamics and forces:
experiments and continuum theory
Phys. Rev. E, 65, 011307 (2002).

[Bocquet02]

L. Bocquet, J. Errami, T. C. Lubensky.
A hydrodynamic model for a dynamical
jammed-to-flowing transition in gravity
driven granular media.
Preprint (2002)

[Bonamy01]

Phénomènes collectifs dans les matériaux
granulaires
Thèse de l'université de Paris XI –Orsay.

[Bonamy02a]

D. Bonamy, F. Daviaud et L. Laurent
Experimental study of granular flows via
high speed camera: a continuous
description
Phys. Fluids, 14, 1666 (2002).

[Bonamy02b]

D. Bonamy, F. Daviaud, L. Laurent, M.
Bonetti et J. P. Bouchaud
Multiscale clustering in granular surface
flows

Phys.Rev.Lett., 89, 034301 (2002).

[Bosley69]

J. Bosley, B. Schofield et B. Shook
An experimental study of granule discharge from model hoppers
Trans. Instn Chem. Engrs., 47, T147-T153 (1969).

[Bourada99]

Etude du comportement des milieux granulaires par homogénéisation périodique
Thèse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (1999).

[Brach91]

R. M. Brach.
Mechanical impact dynamics
New York, J. Wiley and Sons (1991).

[Brown70]

R. L. Brown et J. C. Richards
Principles of powder mechanics
Pergamon Press, Oxford (1970).

[Bureau02]

L. Bureau
Elasticité et rhéologie d'une interface macroscopique : du piégeage au frottement solide.
Thèse de l'Université Paris 7 (2002).

[Callaghan93]

P. T. Callaghan
Principles of Nuclear Magnetic Resonance Microscopy.
Edited by Oxford Science Publication (1993)

[Callaghan99]

P. T. Callaghan
Rheo-NMR: nuclear magnetic resonance and the rheology of complex fluids
Rep. Prog. Phys., 62, 599 - 668 (1999).

[Calvetti97]

F. G. Calvetti, G. Combe et J. Lanier

Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material : relation between structure evolution and loading path
Mech. Coh. Frict. Materials, 2, 121-163 (1997).

[Bonamy02b]

D. Bonamy et P. Mills.
Diphasic non-local model for granular surface flows.
Soumis *Europhysics Letters* (2002)

[Cambou95]

B. Cambou, P. Dubujet, F. Emeriault et F. Sidoroff
Homogeneization for granular materials
Eur.J.Mech. A/Solids, 14, 255-276 (1995).

[Campbell85a]

C. S. Campbell et C. E. Brennen
Chute flows of granular material : some computer simulations
J. Appl. Mech., 52, 172-178 (1985).

[Campbell85b]

C. S. Campbell, C. E. Brennen et R. H. Sabersky
Flow regimes in inclined open channel flows of granular materials
Powder Tech., 41, 77-82 (1985).

[Campbell90]

C. S. Campbell
Rapid granular flows
Ann. Rev. Fluid Mech., 22, 57-92 (1990).

[Caprihan97]

A. Caprihan et al.
Magnetic resonance imaging of vibrating granular beds by spatial scanning
Rev. Sci. Instrum., 68, 4217 – 4220 (1997).

[Caprihan00]

A. Caprihan et J. D. Seymour
Correlation time and diffusion coefficient imaging : application to granular flow system
Journal of Magnetic Resonance, 144, 96-107 (2000).

[Carnahan69]

N.F. Carnahan et K. E. Starling.
Equations of state for non-attracting rigid spheres.
J. Chem. Phys., 51, 635-636 (1969).

[Chapman70]

S. Chapman et T. G. Cowling
The mathematical theory of non-uniform gases.
Cambridge, Cambridge University Press (1970).

[Cheng97]

H. A. Cheng et al.
NMR and mechanical measurements of the collisional dissipation of granular flow in a rotating, partially filled, horizontal cylinder
In Powders & Grains 97, édité par R. Behringer et J. Jenkins, 463-465 (1997).

[Cholet98]

C. Cholet
Chocs de solides rigides
Thèse de l'Université Paris 6 (1998).

[Christoffersen81]

J. Christoffersen, M. M. Mehrabadi et S. Nemat-Nasser
A micromechanical description of granular material behavior
J. Appl. Mech., 48, 339-344 (1981).

[Clement92]

E. Clement, J. Duran et J. Rajchenbach
Experimental study of heaping in a two-dimensional sandpile
Phys. Rev. Lett., 69, 1189-1192 (1992).

[Clement95]

E. Clement, J. Rajchenbach et J. Duran
Mixing of a granular material in a bidimensional rotating drum
Europhys. Lett., 30, 7-12 (1995).

[Combe01]

G. Combe
Origines géométriques du comportement quasi-statique des assemblages

granulaires denses : Etude par simulations numériques.

Thèse de l'ENPC. (2001)

[Corfdir01]

A. Cordir, P. Lerat, J. N. Roux.
Translation and rotation of grains within an interface between granular media and structure.
In : Powders and Grains (2001).

[Courrech02]

S. Courrech du Pont, P. Gondret, B. Perrin et M. Rabaud
Wall effects on granular heap stability
preprint (2002).

[Coussot00]

P. Coussot
Scaling approach of granular flow regimes.
En Préparation pour *Phys. Rev. Lett.* (2000)

[Coussot01]

Ph. Coussot, S. Raynaud, F. Bertrand, P. Moucheron, J.P. Guilbaud, H.T. Huynh, S. Jarny, D. Lesueur
Coexistence of liquid and solid phase in flowing glassy materials.
Phys. Rev. Lett., 88, 218000301 (2001)

[Cras02]

Dossier "Physique de la matière en grain"
C.R. Physique, 3 (2002).

[Cundall79]

P. A. Cundall et O. D. L. Strack
A discrete numerical model for granular assemblies
Géotech., 29, 47-65 (1979).

[Daerr99a]

A. Daerr et S. Douady
Two types of avalanches behaviour in granular media
Nature, 399, 241-243 (1999).

[Daerr99b]

A. Daerr et S. Douady

Sensitivity of granular surface flow to preparation
Europhys.Lett., 47, 324-330 (1999).

[Dantu68]

P. Dantu
Etude statistique des forces intergranulaires dans un milieu pulvérulent
Géotechnique, 18, 50-55 (1968).

[daCruz99]

F. da Cruz
Ecoulements granulaires en conduite verticale
Stage de maîtrise physique des matériaux,
Université de Marne la Vallée (1999).

[daCruz02a]

F. da Cruz, F. Chevoir, D. Bonn, P. Coussot.
Viscosity bifurcation in granular materials, foams and emulsion.
A paraître dans *Physical Review E* (2002).

[daCruz02b]

F. da Cruz, F. Chevoir, S. Emam, J. N. Roux.
Quasi-static to dynamic transition in dense flow of dry grains
Preprint (2002).

[Dave98]

R. N. Dave et B. G. Bukiet
Non intrusive rigid body tracking technique for dry particulate flows
Scientific Instruments (1998)

[deGennes98]

P. G. De Gennes
Reflections on the mechanics of granular matter
Physica A, 261, 267-293 (1998).

[Debregeas02]

G. Debregeas, H. Tabuteau et J. M. di Meglio
Deformation and flow of a two-dimensional foam under continuous shear
Phys. Rev. Lett. (2002).

[Denniston99]

C. Denniston et H. Li

Dynamics and stress in gravity driven granular flow
Phys. Rev. E, 59, 3289-3292 (1999).

[Desrues96]

J. Desrues, R. Chambon, M. Mokni et F. Mazeroll
Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography
Géotechnique 46, 529-546 (1996).

[Dimnet02]

E. Dimnet
Chocs de solides rigides et déformables.
Thèse de l'ENPC (2002).

[Dippel98]

S. Dippel
Microscopic dynamics of granular materials
Thèse de l'Université Gerhard Mercator de Duisbourg (1998).

[Dippel99]

S. Dippel et D. Wolf
Rapid granular flow on a rough inclined plane
Computer Communications, 121, 284-289, (1999).

[Douady99]

S. Douady, B. Andreotti et A. Daerr
On granular surface flow equations
Eur. Phys. J. B, 11, 131-142 (1999)

[Douady02]

S. Douady, B. Andreotti, A. Daerr et P. Cladé
From a grain to avalanches : on the physics of granular surface flows
C.R. Physique 3, 177-186 (2002).

[Drake88]

T. G. Drake
Experimental flows of granular material
Thèse de l'Université de Californie, Los Angeles (1988).

[Drake90]

T. G. Drake
Structural features in granular flows
Journal of Geophysical Research, 95,
8681-8696 (1990).

[Drake91]

T. G. Drake
Granular flow : physical experiments and
their implications for microstructural
theories
J. Fluid Mech., 225, 121-152 (1991).

[Drake95]

T. G. Drake et O. R. Walton
Comparison of experimental and simulated
grain flows
J. Appl. Mech., 62, 131-135 (1995).

[Drescher72]

A. Drescher et G. de Josselin de Jong
Photoelastic verification of a mechanical
model for the flow of granular material
J. Mech. Phys. Solids, 20, 337-351 (1972).

[Duran97]

J. Duran
Sables, poudres et grains.
Eyrolles Sciences, Paris (1997).

[Duran98]

J. Duran
Static and dynamic arching effect in
granular materials
in *Physics of dry granular media*, edited by
H. J. Hermann, J. P. Hovi and S. Luding,
Balkema, Dordrecht (1998).

[Dury98]

C. M. Dury, H. H. Ristow, J. L. Moss et M.
Nakagawa
Boundary effects on the angle of repose in
rotating cylinders
Phys.Rev.E 57, 4491-4497 (1998).

[Edwards89]

S. Edwards et R. B. S. Oakeshott
The transmission of stress in an aggregate
Physics D 38, 88-92 (1989).

[Ehrichs95]

E. E. Ehrichs, H. M. Jaeger, G. S.
Karczmar, J. B. Knight, V. Y. Kuperman et
S. R. Nagel
Granular convection observed by magnetic
resonance imaging
Science, 267, 1632-1634 (1995).

[Ertas01]

D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, D.
Levine et L. E. Silbert
Gravity-driven dense granular flows
Europhys. Lett., 56, 214-220 (2001).

[Evesque88]

P. Evesque et J. Rajchenbach
Caractérisation d'avalanches de billes dans
un tambour tournant
CRAS 2, 307, 223 (1988).

[Evesque91]

P. Evesque
Analysis of the statistics of sandpile
avalanches using soil-mechanics results
and concepts,
Phys.Rev. A 43, 2720-2740 (1991).

[Falcon98]

E. Falcon, C. Laroche, S. Fauve et C.
Coste
Collision of a 1D column of beads with a
wall
Eur. Phys. J B, 5, 111-131 (1998).

[Foerster94]

S. F. Foerster, M. Y. Louge, H. Chang et
K. Allia
Measurements of the collision properties of
small spheres
Phys. Fluids, 6, 1108-1115 (1994).

[Frayse99]

N. Fraysse, H. Thomé et L. Petit
Humidity effect on the stability of sandpile
Eur. Phys. J. B, 11, 615 (1999).

[Fukushima99]

E. Fukushima
Nuclear magnetic resonance as a tool to
study flow

Annual Review of Fluid Mechanics, 31, 95-123 (1999).

[Geng01]

J. Geng, D. Howell, E. Longhi, R. P. Behringer, G. Reydellet, L. Vanel, E. Clément et S. Luding
Footprints in sand : the response of a granular material to local perturbations
Phys. Rev. Lett. 87, 035506 (2001).

[Gervois93]

A. Gervois et D. Bideau
Some geometrical properties of two-dimensional hard disk packings
In: Disorder and granular media, éd. par D. Bideau et A. Hansen, 1-34. - Amsterdam, North Holland (1993).

[Goldhirsch93]

I. Goldhirsch et G. Zanetti
Clustering instability in dissipative gases
Phys. Rev. E, 70, 1619-1622 (1993).

[Goldsmith60]

S. Goldsmith
Impact : The theory and physical behaviour of colliding bodies.
Edward Arnold, London (1960)

[Haff83]

P. K. Haff
Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon.
J. Fluid. Mech., 134, 401-430 (1983).

[Halsey98]

T. C. Halsey et A. J. Levine
How sandcastles fall
Phys.Rev.Lett., 80, 3141 (1998).

[Hanes85]

D. M. Hanes et D. L. Inman
Observations of rapidly flowing granular fluid flow
J. Fluid Mech., 150, 357-380 (1985).

[Hanes00]

D. M. Hanes et O. R. Walton

Simulations and physical measurements of glass spheres flowing down a bumpy incline.

Powder Technology, 109, 133-144 (2000).

[Henderson84]

J. R. Henderson et F. van Swol
On the interface between a fluid and a planer wall - Theory and simulations of a hard sphere fluid at a hard wall
Molecular Physics, 51, 991-1010 (1984).

[Hermann98]

H. J. Herrmann et S. Luding
Modeling granular media on the computer
Cont. Mech. Thermodyn. 10, 189-231 (1998).

[Hermann01]

H. Hermann
Structures in deformed granular packings
Granular Matter, 3, 15-18 (2001)

[Hill97a]

K. M. Hill, A. Caprihan et J. Kakalios
Axial segregation of granular media rotated in a drum mixer: Pattern evolution
Physical Review E, 56, 4386-4393 (1997).

[Hill97b]

K. M. Hill, A. Caprihan et J. Kakalios
Dynamic angle of repose as a function of mixture concentration: Results from MRI experiments and DEM simulations
In Powders & Grains 97, édité par R. Behringer et J. Jenkins (1997).

[Hill97c]

K. M. Hill, A. Caprihan et J. Kakalios
Bulk segregation in rotated granular material measured by magnetic resonance imaging
Phys. Rev. Lett., 78, 50-53 (1997).

[Hinrichsen90]

E. Hinrichsen, J. Feder et T. Jossang
Random packing of disks in two dimensions
Phys. Rev. A, 41, 4199-4209 (1990).

[Hopkins90]

M. A. Hopkins et M. Louge
Inelastic microstructure in rapid granular flows of smooth disks
Phys.Fluids A, 3, 47-57 (1990).

[Horlück01]

S. Horlück et P. Dimon
Grain dynamics in a two-dimensional granular flows
Phys.Rev.E, 63, 031301 (2001).

[Howell99]

D. Howell, R. P. Behringer et C. T. Veje
Stress fluctuations in a 2d granular Couette experiment : a continuum transition
Phys. Rev. Lett., 82, 5241-5244 (1999).

[Hungr84]

O. Hungr et N. R. Morgenstern
Experiments on the flow behaviour of granular materials at high velocity in an open channel
Géotechnique, 34, 405-413 (1984).

[Hutter94]

K. Hutter et K. R. Rajagopal
On flows of granular materials
Continuum Mechanics and Thermodynamics, 6, 81-139 (1994).

[Ishida79]

M. Ishida et T. Shirai
Velocity distributions in the flow of solid particles in an inclined open channel
J. Chem. Eng. Jap., vol. 12, pp. 46-50, (1979).

[Jackson83]

R. Jackson
Some mathematical and physical aspects of continuum models for the motion of granular materials
in *Theory of dispersed multiphase flow*, edited by R. E. Meyer, Academic Press, New York (1983).

[Jaeger89]

H. M. Jaeger, C. H. Liu et S. R. Nagel
Relaxation at the angle of repose

Phys. Rev. Lett., 62, 40-43 (1989).

[Jaeger90]

H. M. Jaeger, C. H. Liu, S. R. Nagel et T. A. Witten
Friction in granular flows
Europhysics Lett., 11, 619-624 (1990).

[Jaeger96]

H. M. Jaeger et S. Nagel
Granular solids, liquids and gases
Review of Modern Physics, 68, 1259-1273 (1996).

[Janssen1895]

H. A. Jansen
Versuche über Getreidedruck in Silozellen
Zeitschr. D. Vereines deutscher Ingenieure 39, n°35, 1045-1049 (1895).

[Jean92]

M. Jean et J. J. Moreau
Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections
In : *Contact mechanics*, éd. par A. Curnier, 31-48. - Lausanne (1992).

[Jean93]

M. Jean
Numerical methods for three dimensional dynamical problems
In : *Contact mechanics*, éd. par M. H. Aliabadi et C. A. Brebbia. - Boston, (1993).

[Jean95]

M. Jean
Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies : numerical simulation of geomaterials
In : *Mechanics of geomaterial interfaces*, éd. par A. P. S. Salvadarai et M. J. Boulon. 463-486 - Amsterdam, Elsevier Science, (1995).

[Jenkins83]

J. T. Jenkins et S. B. Savage
A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles
J. Fluid Mech., 130, 187-202 (1983).

[Jenkins85]

J. T. Jenkins et M. W. Richman
Kinetic theory for plane flows of a dense gas of identical, rough, inelastic, circular discs.
Phys. Fluids, 28, 3485-3494 (1985).

[Jenkins94]

J. T. Jenkins
Rapid granular flows down inclines
Appl. Mech. Rev., 47, S240 (1994).

[Jenkins01]

J. T. Jenkins et F. Chevoir
Dense plane flows of frictional spheres down a bumpy, frictional incline
preprint (2001).

[Jenkins02]

J. Jenkins et C. Zhang.
Kinetic theory for identical, frictional, nearly elastic spheres.
Communication privé (2002)

[Johnson85]

K. L. Johnson.
Contact Mechanics.
Edited by Cambridge University Press (1985).

[Johnson87]

P. C. Johnson et R. Jackson
Frictional-collisional constitutive relations for granular materials, with application to plane shearing
J. Fluid Mech., 176, 67-93 (1987).

[Johnson90]

P. C. Johnson, P. Nott et R. Jackson
Frictional-collisional equations of motion for particulate flows and their application to chutes.
J. Fluid Mech., 210, 501-535 (1990).

[Kadanoff99]

L. P. Kadanoff
Built upon sand : theoretical ideas inspired by granular flows

Review of Modern Physics, 71, 435-444 (1999).

[Kanatani81]

K-I. Kanatani
A theory of contact force distribution in granular materials
Powder Technology, 28, 167-172 (1981).

[Kastler00]

J. Kastler
Comprendre l'Irm.
Edition Masson (2000).

[Khakhar01]

D. V. Khakhar, A. V. Orpe, P. Andresen et J. M. Ottino
Surface flow of granular materials: model and experiments in heap formation
J. Fluid Mech., 441, 255-264 (2001).

[Komatsu01]

T. S. Komatsu, S. Inagaki, M. Nakagawa et S. Nasuno
Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow
Phys. Rev. Lett., 86, 1757-1760 (2001).

[Kruyt96]

N. P. Kruyt et L. Rothenburg
Micromechanical definition of the strain tensor for granular materials
J. Appl. Mech., 118, 706-711 (1996).

[Kuperman95]

V. Y. Kuperman et al.
A new technique for differentiating between diffusion and flow in granular media using magnetic resonance imaging
Rev. Sci. Instrum., 66, 4350 - 4355 (1995)

[Kuperman96]

V. Y. Kuperman
Nuclear magnetic resonance measurements of diffusion in granular media
Phys. Rev. Lett., 77, 1178-1181 (1996).

[Kuperman97]

V. Y. Kuperman
NMR measurements demonstrate increased

intensity of collisions near walls in a vibrating granular material
In Powders & Grains, 393-395 (1997).

[Lançon96]

P. Lançon.
 Etude expérimentale d'écoulements granulaire en trémie 2D.
 Stage de D.E.A. Physique des Liquides (1996).

[Lätzel00]

M. Lätzel, S. Luding et H. J. Hermann
 Macroscopic material properties from quasi-static, microscopic simulations of a two-dimensional shear-cell
Granular Matter, 2, 123-135 (2000).

[Lcpc00]

Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires
 Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, édité par F. Chevoir et J. N. Roux, Paris (2000).

[Lemaitre02]

A. Lemaître
 Origin of a repose angle: kinetics of rearrangement for granular materials
Phys. Rev. Lett., 89, 064303 (2002).

[Lemieux00]

P. A. Lemieux et D. J. Durian
 From avalanches to fluid flow: a continuum picture of grain dynamics down a heap
Phys. Rev. Lett., 85, 4273-4276 (2000).

[LePennec96]

T. Le Pennec, K. J. Maloy, A. Hansen, M. Ammi, D. Bideau et X. Wu
 Ticking hourglasses : experimental analysis of intermittent flow
Phys. Rev. E, 53, 2257-2264 (1996).

[Leroy98]

V. Leroy
Écoulements granulaires en silo bidimensionnel

Stage de fin d'étude, Ecole Polytechnique (1998).

[Limat98]

L. Limat
 Effets rotationnels dans le cisaillement d'un milieu granulaire
CRAS 326, ser. II, 501-509 (1998).

[Limon96]

Y. Limon Duparcmeur
Écoulement et structuration de milieux granulaires modèles bidimensionnels
 Thèse de l'Université de Rennes (1996).

[Liu95]

C. H. Liu, S. R. Nagel, D. A. Schecter, S. N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan et T. A. Witten
 Force fluctuations in bead packs,
Science 269, 513 (1995).

[Losert00]

W. Losert, L. Bocquet, T. C. Lubensky et J. P. Gollub
 Particle dynamics in sheared granular matter
Phys. Rev. Lett., 85, 1428-1431 (2000).

[Lounge94]

M. Y. Lounge
 Computer simulations of rapid granular flows of spheres interacting with a flat, frictional boundary
Phys. Fluids, 6, 2253-2269 (1994).

[Lounge01]

M. Y. Lounge et S. C. Keast
 On dense granular flows down flat frictional inclines
Phys. Fluids, 13, 1213-1233 (2001).

[Love27]

A. E. H. Love
A treatise of the mathematical theory of elasticity (1927).

[Luding94a]

S. Luding

Models and simulations of granular materials

Thèse de l'Université Albert Ludwigs de
Freibourg (1994).

[Luding94b]

S. Luding, E. Clement, A. Blumen, J.
Rajchenbach et J. Duran
Studies of columns of beads under external
vibrations
Phys. Rev. E, 49, 1634-1646 (1994).

[Luding94c]

S. Luding, E. Clement, A. Blumen, J.
Rajchenbach et J. Duran
Anomalous energy dissipation in
molecular-dynamics simulations of grains :
the detachment effect
Phys. Rev. E, 50, 4113-4122 (1994).

[Luding00]

S. Luding et T. Pöschel.
Granular Gases.
Edité par Springer (2000)

[Luding01]

S. Luding
From DEM Simulations towards a
Continuum Theory of Granular Matter.
In Powders and Grains, 141-148 (2001)

[Lun84]

K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey et N.
Chepurniy.
Kinetic theories for granular flow :
inelastic particles in couette flow and
slightly inelastic particles in a general
flowfield.
J. Fluid. Mech., 140, 223-256 (1984).

[Lun91]

K. K. Lun.
Kinetic theory for granular flow of dense,
slightly inelastic, slightly rough spheres.
J. Fluid. Mech., 233, 539-559 (1991).

[Lun94]

C. K. K. Lun et A. A. Bent
Numerical simulation of inelastic frictional
spheres in simple shear flow

J. Fluid Mech., 258, 335-353 (1994).

[Maw76]

N. Maw, J.R. Barber et J. N. Fawcett
The oblique impact of elastic spheres.
Wear, 38, 101-114 (1976).

[Maw81]

N. Maw, J.R. Barber et J. N. Fawcett
The role of elastic tangential compliance in
oblique impact.
J. Lub. Tech., 103, 74-80 (1980).

[McNamara92]

S. Mcnamara et W. R. Young
Inelastic collapse and clumping in a one-
dimensional granular medium.
Phys. Fluids A, 4, 496-504 (1992).

[McNamara94]

S. Mcnamara et W. R. Young
Inelastic collapse in two dimensions
Phys. Rev. E, 50, R28-31 (1994).

[Menon97]

N. Menon et D. J. Durian
Diffusing wave spectroscopy of dynamics
in a three dimensional granular flow
Science, 275, 1920-1922 (1997).

[Metcalf96]

G. Metcalfe, M. Shattuck.
Pattern formation during mixing and
segregation of flowing granular materials.
Physica A, 233, 709 - 717 (1996).

[Miller96]

B. Miller, C. O'Hern et R. P. Behringer
Stress fluctuations for continuously
sheared granular materials
Phys. Rev. Lett., 77, 3110-3113 (1996).

[Mills99]

P. Mills, D. Loggia et M. Tixier
Model for a stationary dense granular flow
along an inclined wall
Europhys. Lett., 45, 733-738 (1999).

[Mills00]

P. Mills, M. Tixier et D. Loggia

Influence of roughness and dilatancy for dense granular flow along an inclined wall
Eur. Phys. J. E, 1, 5-8 (2000).

[Mohan97]

L. S. Mohan, P. R. Nott et K. K. Rao
Fully developed flow of coarse granular materials through a vertical channel
Chemical Engineering Science, 52, 913-933 (1997).

[Mohan99]

L. S. Mohan, P. R. Nott et K. K. Rao
A frictional Cosserat model for the flow of granular materials through a vertical channel
Acta Mech., 138, 75-96 (1999).

[Mohan01]

L. S. Mohan, K. K. Rao et P. R. Nott
Frictional Cosserat model for slow granular flows
J. Fluid. Mech., 457, 377-409 (2001)

[Mokni92]

M. Mokni
Relations entre déformations en masse et déformations localisées dans les matériaux granulaires
Thèse de l'Université Joseph Fourier de Grenoble-I (1992).

[Moran82]

J. Moran et al.
Rapid average flow velocity measurement by NMR,
Magn. Reson. Med., 3, 317-320 (1982).

[Moreau88a]

J. J. Moreau
Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics
In : Nonsmooth mechanics and application : courses and lectures, éd. par J. J. Moreau et P. D. Panagiotopoulos 1-82. - Vienne, Springer-Verlag (1988).

[Moreau88b]

J. J. Moreau et P. D. Panagiotopoulos

Topics in nonsmooth mechanics. - Berlin, Birkhäuser (1988).

[Moreau93]

J. J. Moreau
New computation methods in granular dynamics
In : Powders and Grains, éd. par C. Thornton. 227-232. - Rotterdam (1993).

[Moreau94]

J. J. Moreau
Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular materials
Eur. J. Mech. A, 13, 93-114 (1994).

[Moreau95]

J. J. Moreau
Numerical experiments in granular dynamics : vibration-induced size segregation
In : Contact Mechanics, éd. par M. Raous. 347-358. - New York (1995).

[Moreau96]

J. J. Moreau et M. Jean
Numerical treatment of contact and friction : the contact dynamics method
In : Engineering systems design and analysis, éd. par A. Lagarde et M. Raous. 201-208 (1996).

[Moreau97]

J. J. Moreau
Numerical investigation of shear zones in granular materials
In : Friction, Arching, Contact Dynamics, éd. Par D. E. Wolf et P. Grassberger. 233-247. - Londres (1997).

[Moucheron00]

Techniques d'imagerie pour les écoulements granulaires
Stage du DEA Géomatériaux, Université de Marne la Vallée (2000).

[Mueth98]

D. M. Mueth, H. M. Jaeger et S. R. Nagel
Force distribution in a granular medium

Phys. Rev. E, 57, 3164 (1998).

[Mueth00]

D. M. Mueth, G. F. Debregeas, G. S. Karczmar, P. J. Eng, S. R. Nagel et H. M. Jaeger
Signatures of granular microstructure in dense shear flows
Nature, 406, 385-389 (2000).

[Mueth01]

D. M. Mueth
Measurements of particle dynamics in slow, dense granular couette flow
Preprint (2001).

[Nakagawa93]

M. Nakagawa, S. A. Altobelli, A. Caprihan, E. Fukushima et E. K. Jeong
Non invasive measurements of granular flows by magnetic resonance imaging
Experiments in Fluids, 16, 54-60 (1993).

[Nakagawa97]

M. Nakagawa et al.
NMR measurement and approximate derivation of the velocity depth-profile of granular flow in a rotating, partially filled, horizontal cylinder
In Powders & Grains, édité par Behringer & Jenkins, 447-450 (1997).

[Nasuno98]

S. Nasuno, A. Kudrolli, A. Bak, et J. P. Gollub
Time-resolved studies of stick-slip friction in sheared granular layers
Phys. Rev. E, 58, 2161-2171 (1998).

[Natarajan95]

V. V. R. Natarajan, M. L. Hunt et E. D. Taylor
Local measurements of velocity fluctuations and diffusion coefficients for a granular material flow
J. Fluid Mech., 304, 1-25 (1995).

[Nedderman80]

R. M. Nedderman et C. Laohakul

The thickness of the shear zone of flowing granular materials
Powder Technology, 25, 91-100 (1980).

[Nedderman92]

R. M. Nedderman
Statics and kinematics of granular materials
Cambridge University Press, Cambridge (1992).

[Ngadi98]

A. Ngadi et J. Rajchenbach
Intermittencies in the compression process of a model granular medium
Phys.Rev.Lett., 80, 273-276 (1998).

[Nikitidis98]

M. S. Nikitidis, U. Tüzün et N. M. Spyrou
Measurement of size segregation by self-diffusion in slow-shearing binary mixture using dual photon gamma-ray tomography
Chemical Engineering Science, 53, 2335-2351 (1998).

[O'Hern01]

C. S. O'Hern, S. A. Langer, A. J. Liu et S. R. Nagel
Force distribution near jamming and glass transition
Phys. Rev. Letters, 86, 111-114 (2001).

[Oda99]

Mechanics of Granular Material.
Ed. Balkema (1999).

[Ogawa80]

S. Ogawa
Multitemperature theory of granular materials.
In : US-Japan seminar on continuum mechanical and statistical approaches in the mechanics of granular materials.
Edited by S. C. Cowin et M. Satake, 208-217 (1980).

[Onoda 90]

G.Y. Onoda et E. G. Liniger.
Random loose packings of uniform spheres and the dilatancy onset.

Phys. Rev. Lett., 64, 2727-2730 (1990)

[Orpe01]

A. V. Orpe et D. V. Khakhar
Scaling relation for granular flow in quasi-
two-dimensional rotating cylinders
Phys.Rev.E., 64, 031302 (2001).

[Ovarlez02]

G. Ovarlez.
Statique et rhéologie d'un milieu
granulaire confiné.
Thèse de l'université Paris XI. (2002)

[Paris00]

A. Paris
*Ecoulements de grains polygonaux sur un
plan incliné*
Stage de maîtrise physique et applications,
Université d'Orsay (2000).

[Patton87]

J. S. Patton, C. E. Brennen et R. H.
Sabersky
Shear flows of rapidly flowing granular
materials
J. Appl. Mech., 54, 801-805 (1987).

[Pdgm98]

Physics of dry granular media
édité par H. J. Hermann, J. P. Hovi et S.
Luding, Balkema, Dordrecht (1998).

[Pitois00]

O. Pitois
Etude de la compacité d'un milieu
granulaire par diffusion multiple de
lumière.
*Colloque physique et mécanique des
matériaux granulaires.*
Actes des journées scientifiques du LCPC
(2000).

[Poon95]

W. C. K. Poon et P. N. Pusey
*In Observation, prediction and simulation
of phase transitions in complex fluids.*
Edited by Baus et al., Kluwer, (1995).

[Porion00]

P. Porion, N. Sommier et P. Evesque
Dynamics of mixing and segregation
processes of grains in 3D blender by NMR
imaging investigation
Europhysics Letters, 50, 319-325 (2000).

[PG01]

Powders and Grains
Edité par Y. Kishino, Lisse, Swets and
Zeitlinger (2001).

[Pouliquen96a]

O. Pouliquen et R. Gutfraind
Stress fluctuations and shear zones in
quasi-static granular chute flows
Phys. Rev.E, 53, 552-561 (1996).

[Pouliquen96b]

O. Pouliquen et N. Renaut
Onset of granular flows on an inclined
rough surface : dilatancy effects
J. Physique II, 6 923-935 (1996).

[Pouliquen99a]

O. Pouliquen
Scaling laws in granular flows down rough
inclined planes
Phys. Fluids, 11, 542-548 (1999).

[Pouliquen99b]

O. Pouliquen
On the shape of granular fronts down
rough inclined plane
Physics of Fluids, 11, 1956-1958 (1999).

[Pouliquen01]

O. Pouliquen, Y. Forterre et S. Ledizes
Dense granular flows down incline as a
self activated process
Advances in Complex systems, 4, 441-450
(2001).

[Pouliquen02a]

O. Pouliquen et F. Chevoir
Dense flows of dry granular materials
C.R. Physique 3, 163-175 (2002).

[Pouliquen02b]

O. Pouliquen et Y. Forterre

Friction law for dense granular flow : application of the motion of a mass down a rough inclined plane
J.Fluid Mech, 453, 133-151 (2002).

[Quartier00]

L. Quartier, B. Andreotti, S. Douady et A. Daerr
 Dynamics of a grain on a sandpile model
Phys. Rev. E, 62, 8299-8307 (2000).

[Radjai95]

F. Radjai
Dynamique des rotations et frottement collectif dans les systèmes granulaires
 Thèse de l'Université d'Orsay (Paris XI) (1995).

[Radjai96]

F. Radjai, L. Brendel et S. Roux
 Nonsmoothness, indeterminacy and friction in two-dimensional arrays of rigid particles
Phys. Rev. E, 54, 861-873 (1996).

[Radjai01a]

F. Radjai et S. Roux
 Features of the granular texture
In Powders and Grains, edited by Y. Kishino, 21-24, Lisse, Swets and Zeitlinger (2001).

[Radjai01b]

F. Radjai
 Features of force transmission in granular media
In Powders and Grains, edited by Y. Kishino, 157-160, Lisse, Swets and Zeitlinger (2001).

[Radjai02]

F. Radjaï , S. Roux
 Turbulent-like fluctuations in quasistatic flow of granular media
In Cond-Matt, Preprint (2002)

[Rajchenbach00]

J. Rajchenbach
 Granular flows
Advances in Physics, 49, 229-256 (2000).

[Rajchenbach02]

J. Rajchenbach.
 Dense, inelastic grains under gravity.
Preprint (2002)

[Raynaud01]

Cf. Coussot01

[Restagno00]

F. Restagno
 Interactions entre contacts solides et cinétique de la condensation capillaire. Aspects macroscopiques et aspects microscopiques
 Thèse de l'Ecole Normale Supérieure de Lyon (2000).

[Reydellet02]

G. Reydellet
Mesure expérimentale de la fonction réponse d'un matériau granulaire.
 Thèse de l'Université Paris VI. (2002)

[Reynolds1885]

O. Reynolds.
 On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact.
Phil. Mag. Ser. 5, 20, 469-481 (1885).

[Richard99]

P. Richard, L. Oger, J-P. Troadec et A. Gervois
 Geometrical characterization of hard-sphere systems
Phys. Rev. E, 60, 4551-4558 (1999).

[Richman90]

M. W. Richman et R.P. Marciniec
 Gravity-driven granular flows of smooth, Inelastic Spheres Down Bumpy Inclines.
Journal of Applied Mechanics, 57, 1036-1043 (1990).

[Ridgway70]

K. Ridgway et R. Rupp
 Flow of granular material down chutes
Chem. Process Eng., 51, 82-85 (1970).

[Ristow99]

G. H Ristow, M. Nakagawa
Shape dynamics of interfacial front in rotating cylinders.
Phys. Rev. E, 59, 2044 – 2048 (1999)

[Roberts1884]

I. Roberts
Determination of pressure of granular substances
Proc. Royal Soc. 36, 225-240 (1884).

[Roberts69]

A. W. Roberts
An investigation of the gravity flow of noncohesive granular materials through discharge chutes
J. Eng. Ind., 91, 373-381 (1969).

[Rognon02]

S. Rognon
Ecoulements sur plan incliné : transistion vers l'arrêt.
Université Marne La Vallée, Stage de Maîtrise de Physique et matériaux (2002)

[Roux02]

J. N. Roux et G. Combe
Quasi-static rheology and the origins of strain
C.R. Physique 3, 131-140 (2002).

[Rouyer00]

F. Rouyer et N. Menon
Etude d'une couche verticale de grains vibrées, gaz granulaire à 2D.
Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires.
Actes des journées scientifiques du LCPC (2000).

[Sadjadpour99]

M. Sadjadpour et C. S. Campbell
Granular chute flow regimes: mass flowrates, flowrate limits and clogging.
Advanced Powder Technol., 10, 175-185 (1999)

[Savage79]

S. B. Savage

Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels
J. Fluid Mech., 92, 53-96 (1979).

[Savage81]

S. B. Savage et D. J. Jeffrey.
The stress tensor in a granular flow at high shear rates.
J. Fluid Mech., 110, 255-272 (1981).

[Savage83]

S. B. Savage
Granular flows down rough inclines-review and extension
In Mechanics of granular Materials: new Models and constitutive relations, edited by J. T. Jenkins and M. Satake, Elsevier, Amsterdam, (1983).

[Savage84]

S. B. Savage et M. Sayed
Stress developed by dry cohesionless granular materials sheared in an annular cell
J. Fluid Mech., 142, 391-430 (1984).

[Savage89]

S. B. Savage
Flow of granular materials
In Theoretical and applied mechanics edited by P. Germain, M. Piau and D. Caillerie, 241-266, North Holland, Amsterdam (1989).

[Savage98]

S. B. Savage
Analyses of slow high-concentration flows of granular materials
J. Fluid Mech. 377, 1-26 (1998).

[Schäfer95]

J. Schäfer et D. E. Wolf
Bistability in simulated granular flow along corrugated walls
Phys. Rev. E, 51, 6154-6157 (1995).

[Schäfer96]

J. Schäfer, S. Dippel et D. E. Wolf
Force schemes in simulations of granular materials

J. Phys. I, 6, 5-20 (1996).

[Schofield68]

A. Schofield et P. Wroth
Critical state soil mechanics
McGraw-Hill, London, (1968).

[Schöllmann99]

S. Schöllmann
Simulation of a two-dimensional shear cell
Phys. Rev. E, 59, 889-899 (1999).

[Schwarz98]

O. J. Schwarz, Y. Horie et M. Shearer
Discrete element investigation of stress fluctuation in granular flow at high shear rates
Phys. Rev. E, 57, 2053-2061 (1998).

[Seymour00]

J. D. Seymour, A. Caprihan, S. Altobelli et E. Fukushima
Pulsed gradient spin echo nuclear magnetic resonance imaging of diffusion in granular flow
Phys. Rev. Lett., 84, 266-269 (2000).

[Silbert01]

S. L. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, D. Levine et S. J. Plimpton
Granular flow down an inclined plane.
Phys.Rev.E, 64, 051302 (2001).

[Silbert02a]

S. L. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey et D. Levine
Analogies between granular jamming and the liquid-glass transition
Phys.Rev.E, 65, 051307 (2002).

[Silbert02b]

S. L. Silbert, G. S. Grest, S. J. Plimpton et D. Levine
Boundary effects and self-organisation in dense granular flows
Physics of Fluids, 14, 1 (2002).

[Silbert02c]

S. L. Silbert, J. W. Landry et G. S. Grest

Granular flow down a rough inclined plane : transition between thin and thick piles
preprint. (2002)

[Speedy97]

R. Speedy
On the reproducibility of glasses
J. Chem. Phys. 100, 6684 (1997).

[Staron02]

L. Staron, J. P. Vilotte et F. Radjai
Friction and mobilization of contacts in granular material avalanches
Preprint (2002)

[Takahashi37]

K. Takahasi
On the dynamical properties of granular mass
Geophys. Mag., 11, 165-176 (1937).

[Tan91]

S. Tan et T. Fwa.
Geotech. Test. J., 14, 257-265 (1991).

[Tardos97]

G. I. Tardos
A fluid mechanistic approach to slow, frictional flow of powders
Powder Technology, 92, 61-74 (1997).

[Tardos98]

G. I. Tardos, M. I. Khan et D. G. Schaeffer
Forces on a slowly rotating, rough cylinder in a Couette device containing a dry, frictional powder
Phys. Fluids, 10 335-341 (1998).

[Tejchman93]

J. Tejchman et G. Gudehus
Silo music and silo-quake experiments and a numerical Cosserat approach,
Powder Technology, 76, 201-212 (1993).

[Thompson91]

P. A. Thompson et G. S. Grest
Granular flow and the dilatancy transition
Phys. Rev. Lett., 67, 1751-1754 (1991).

[To01]

- K. To, P. Y. Lai et K. Pak
Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper
Phys.Rev.Lett., 86, 71-74 (2001).
- [Torquato95]**
S. Torquato
Nearest-neighbor statistics for packings of hard spheres and disks
Phys. Rev. E, 51, 3170-3182 (1995).
- [Travers88]**
Compression de milieux granulaires modèles : effet des hétérogénéités
Thèse de l'Université de Rennes (1988).
- [Troadec93]**
J. P. Troadec et J. Dodds
Global geometrical description of homogeneous hard sphere packings
In Physics of granular media, édité par D. Bideau et A. Hansen (1993).
- [Tsai02]**
J. C. Tsai, W. Losert, G. A. Voth et J. P. Gollub
Two-dimensional granular Poiseuille flow on an incline : multiple dynamical regime
Phys. Rev. E, 65, 011306 (2002).
- [Tüzün82]**
U. Tüzün, G. T. Houlsby, R. M. Nedderman et S. B. Savage
The flow of granular material - velocity distribution in slow flow
Chem. Eng. Sci., 37, 1691-1709 (1982).
- [Vallance94]**
J. W. Vallance
Experimental and field studies related to the behavior of granular mass flows and the characteristics of their deposits
Thèse de l'Université technologique du Michigan (1994).
- [Valance98]**
A. Valance et T. Le Pennec
Nonlinear dynamics of density waves in granular flows through narrow vertical channels
Euro. Phys. J. B, 5, 223 (1998).
- [VanDijk83]**
S. VanDijk et al.
A new method for flow velocity measurement: frequency encoded NMR,
Magn. Reson. Med., 3:, 352-362 (1983).
- [vanWeeden85]**
V. J. Weeden, B. R. Rosen, D. Chesler et T. J. Brady
MR velocity imaging by phase display
Journal of Computer Assisted Tomography, 9, 530-536 (1985).
- [VanZuilichem74]**
D. J. Van Zuilichem, N. D. Van Egmond et J. G. de Swart
Density behaviour of flowing granular material
Powder technology, 10, 161-169 (1974).
- [Vardoulakis95]**
I. Vardoulakis J. Sulem.
Bifurcation analysis in geomechanics
Blackie academic and professional (1995).
- [Veje99]**
C. T. Veje, D. W. Howell et R. P. Behringer
Kinematics of a two-dimensional granular couette experiment at the transition to shearing
Phys. Rev. E, 59 739-745 (1999).
- [Vermeer98]**
P. A. Vermeer
Non-associated plasticity for soils, concrete and rock.
In Physics of dry granular media, edited by H. J. Hermann, J. P. Hovi and S. Luding, Balkema, Dordrecht (1998).
- [Verlet82]**
L. Verlet et D. Levesque.
Integral equations for classical fluids III. The hard discs system.
Molec. Phys., 46, 969-980 (1982).
- [Walton93a]**

O. R. Walton
Numerical simulation of inelastic frictional particle-particle interactions
In : Particulate Two-Phase Flow, éd. Par M. C. Roco, 884-911. - Boston, Butterworth-Heinemann (1993).

[Walton93b]

O. R. Walton
Numerical simulation of inclined chute flows of monodisperse, inelastic, frictional spheres
Mechanics of materials 16, 239-247 (1993).

[Weber66]

J. Weber
Recherches concernant les contraintes intergranulaires dans les milieux pulvérulents
Bulletin de Liaison Ponts et Chaussées, 20, 3-1 à 3-20 (juillet-août 1966).

[Warr94]

S. Warr, G. Jacques et J. Huntley
Tracking the translational and rotational motion of granular particles - use of high-speed photography and image processing
Powder Tech., 81, 41-56 (1994).

[Wildman00]

R. D. Wildman, J. M. Huntley, J. P. Hansen, D. J. Parker et D. A. Allen
Single-particle tracking in three-dimensional vibrofluidized granular beds
Phys.Rev. E., 62, 3826 (2000).

[Wolf96]

D. E. Wolf
Modeling and computer simulation of granular media
In : Computational physics. Selected methods, simple exercises, serious applications
éd. Par K. H. Hoffmann et M. Schreiber, Berlin, Springer-Verlag (1996).

[Wolf98]

D. E. Wolf
Friction in granular media

in Physics of dry granular media
edited by H. J. Hermann, J. P. Hovi and S. Luding, Balkema, Dordrecht (1998).

[Wolf02]

D. E. Wolf, D. Kadau, G. Bartels et L. Brendel.
Contact dynamic simulations of compacting cohesive granular systems.
Computer Physics Communications (soumis).

[Wu93]

X. L. Wu et al.
Phys.Rev.Lett, 71, 1363 (1993).

[Yamane98]

K. Yamane et al.
Steady particulate flows in a horizontal rotating cylinder
Phys. Fluids, 10, 1419-1427 (1998).

[Yang00]

X. Yang et D. Candela
Potential energy in a three-dimensional vibrated granular medium measured by NMR imaging
Phys.Rev.Lett., 85, 298-301 (2000).

[Yang02]

X. Yang, C. Huan, D. Candela, R. W. Mair et R. L. Walsworth
Measurement of grain motion in a dense, three-dimensional granular fluid
Phys.Rev.Lett., 88, 044301 (2002).

[Zhang92]

Y. Zhang et C. S. Campbell
The interface between fluid-like and solid-like behaviour in two-dimensional granular flows.
J.Fluid Mech., 237, 541-568 (1992).

[Zhang97]

D. Z. Zhang et A. Prosperetti
Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions
Int. J. Multiphase Flow, 23, 425-453 (1997).

[Zhang00]

X. Zhang et L. Vu-Quoc

Simulation of chute flow of soybeans using
an improved tangential force-displacement
model

Mechanics of Materials, 32, 115-129
(2000).

[Zheng96]

X. M. Zheng et J. M. Hill

Molecular dynamics modelling of granular
chute flow : density and velocity profiles

Powder Technology, 86, 219 (1996).

RESUME

Cette thèse est consacrée aux écoulements de grains secs en régime dense. Nous nous restreignons aux géométries de cisaillement simple, sur plan incliné ou en conduite verticale, autorisant l'étude d'écoulement stationnaires et uniformes. Nous mesurons les grandeurs permettant de discuter la loi de comportement : profils de vitesse, de compacité, et distribution des forces de contact.

En conduite verticale, le profil de vitesse est mesuré à la paroi par imagerie rapide, et à l'intérieur de l'écoulement par imagerie par résonance magnétique nucléaire. On met en évidence la localisation du cisaillement près des parois, et l'invariance de la forme du profil de vitesse avec le débit, signe d'un régime d'écoulement quasi-statique. On a aussi étudié l'influence de la rugosité sur le profil des vitesses, et montré le caractère intermittent de ce type d'écoulement.

Sur plan incliné, la simulation numérique discrète (méthode de dynamique des contacts) permet d'étudier des écoulements d'assemblées de disques polydisperses frottants et complètement inélastiques. Nous avons mis en évidence la plage des écoulements stationnaires et uniformes, limité par une épaisseur d'arrêt dépendant de l'inclinaison. Nous avons observé un profil de compacité constante, avec une décroissance de la compacité moyenne lorsque l'inclinaison augmente. Le profil de vitesse est convexe, et montre une zone d'influence du socle sur les dix premières couches et une zone centrale en accord avec la prédiction du modèle de Bagnold. La vitesse moyenne suit une loi d'échelle en accord avec l'observation de Pouliquen. L'étude du réseau de contact met en évidence des anisotropies importantes ainsi qu'une statistique étalée des forces de contacts. Enfin, nous avons montré que le tenseur des contraintes se restreint essentiellement à la contribution des forces de contacts, et que la pression est isotrope.

Ces observations conduisent à une discussion du rôle relatif des collisions, du frottement, de la compacité, du socle et du réseau de contacts, et une comparaison qualitative des prédictions de plusieurs modèles rhéologiques est proposée. L'analyse micromécanique des problèmes couplés de frottement et rotation permet de comprendre la rotation moyenne des grains, et la réduction notable du frottement effectif entre grains.

ABSTRACT

This thesis is devoted to non-cohesive dense granular flows. We limit our geometries to the case of gravity flow down inclined planes and in vertical channels, which allow to study steady and uniform flows. In order to understand the rheology, we measure basic quantities like velocity and solid fraction profiles and normal force distributions.

In the vertical chute, magnetic resonance imaging, with a vertical magnet and a large area of observation, is used to measure the velocity profile inside the flow. This provides an estimation of the width of the shear layer and of the sliding velocity at the rough wall. We observe the invariance of the velocity shape on the flow rate, which indicates a quasi-static regime. This geometry reveals that the flows are intermittent rather than steady, with quasi-periodic succession of acceleration and jamming.

We have used the contact dynamics to study the flow down a rough inclined plane of polydispersed assembly of totally inelastic frictional and rigid discs. A dense steady flow is observed in a wide range of inclination and height, limited by a critical height. The solid fraction is nearly constant along the height, and significant dilatancy occurs when the shear rates increase. The whole layer is sheared, with no sliding velocity at the bed. It shows a strong influence of the bed in the first layers, and well inside the flow a pseudo-Bagnold rheology. The average velocity verifies a simple scaling law with inclination and height, involving the previous critical height, confirming the experimental observation of Pouliquen. A statistical analysis of the very fluctuating contact forces network's reveals a very large distribution and a strong anisotropy. Using the micromechanical data, we have calculated the components of the average stress tensor, which is dominated by direct interactions between grains.

These observations led us to discuss the relative role played by collisions, friction, solid fraction, rough wall and contact network. We have reviewed some ideas for modelling dense granular flows and compared the predictions of these models with the numerical results.

Mots-Clefs : Ecoulements gravitaires - Plan incliné - Conduite - Grains secs - Dense - Simulations numériques discrètes - IRM - Gammadensitométrie - Rhéologie - Loi de comportement - Micromécanique - Frottement - Rotation.

Keywords : Gravity driven flows - Inclined Plane - Channel - Dry grains - Dense - Discrete numerical simulation - RMI - Gammadensitometry - Rheology - Micromechanics - Friction - Rotation.